Die Entwicklung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik mittels der Methode der Integralgleichungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der hohen

philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Wolfgang Sternberg.

Dienstag, den 27. Februar 1912, mittags 12½ Uhr

im Musiksaale der Universität:

Vortrag

über

Geschichte und Bedeutung der Integralgleichungen

und

Promotion.

ACAD. LEOP. BAT. BIBL.

Breslau

Buchdruckerei H. Fleischmann

1912

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät
der Universität Breslau.

Referent: Geh.-Rat Prof. Dr. Kneser.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. VII. 1911.

Meinen Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545317_0025

Einleitung.

Die Theorie der Integralgleichungen, die von Fredholm[1]) begründet, von Hilbert[2]), Schmidt[3]), Kneser wesentlich gefördert worden ist, kann dazu benutzt werden, die Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Normalfunktionen eines Randwertproblems nachzuweisen. Der grundlegende Entwickelungssatz hat bei Schmidt eine einfache Form. Er lautet: Eine Funktion g(s), welche in der Form

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)p(t)dt \qquad a \leqq s \leqq b$$

dargestellt werden kann, wobei K(s,t) eine reelle, stetige, in s und t symmetrische, p(t) eine stetige Funktion bedeutet, ist nach den Eigenfunktionen des Kernes K(s,t) entwickelbar. Wir wollen die obige Darstellung der Funktion g(s) eine „quellenmässige" nennen. Die Anwendbarkeit des Schmidtschen Satzes auf die mathematische Physik beruht darauf, dass sich die Normalfunktionen eines Randwertproblems in den meisten Fällen mit den Eigenfunktionen einer Integralgleichung identifizieren lassen. Besteht das Randwertproblem aus einer Differentialgleichung nter Ordnung mit sogenannten „Greenschen" Randbedingungen, so lässt sich nach Westfall[4]) eine Funktion g(s), welche im Gebiete a..b der Variabeln s mit ihren ersten n-Ableitungen stetig ist und die Rand-

[1]) Acta Math. Bd. 27.

[2]) Nachrichten der K. Ges. der W. zu Göttingen, 1904, Heft 1 u. 3.

[3]) Erhard Schmidt, Diss., Göttingen, 1905.

[4]) Westfall, Diss., Göttingen, 1905, S. 15—46.

bedingungen erfüllt, quellenmässig darstellen. Aus dem Schmidtschen Entwickelungssatze folgt jetzt ohne weiteres: Liegt ein Randwertproblem vor, bestehend aus einer Differentialgleichung nter Ordnung mit Greenschen Randbedingungen, so kann eine willkürliche Funktion g(s), welche im Gebiete a..b der Variabeln s mit ihren ersten n-Ableitungen stetig ist, in eine Reihe nach den Normalfunktionen entwickelt werden. Dass sich auch unstetige, den Randbedingungen nicht genügende Funktionen entwickeln lassen, ist von Kneser bewiesen worden und zwar für Funktionen einer[1]) und zweier[2]) Variabeln. Die Methode in den Math. Ann. wird dort auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung angewandt, ist jedoch einer Erweiterung auf Differentialgleichungen vierter[3]) und sogar 2nter Ordnung fähig. Die Schwierigkeit liegt bei diesen Aufgaben nicht in der Aufstellung der allgemeinen Bedingungen für die Entwickelbarkeit, sondern in dem Nachweise, dass dieselben bei einem speziellen Problem tatsächlich erfüllt sind. Ich zeige im ersten Kapitel der folgenden Arbeit, dass eine unstetige Funktion nach den Normalfunktionen einer ziemlich komplizierten Differentialgleichung vierter Ordnung entwickelt werden kann. Im zweiten Kapitel wird eine Funktion zweier Variabeln, welche auf einer beliebigen Kurve unstetig werden darf, entwickelt, hierbei aber nicht die Knesersche Methode aus den Rend. di Pal., sondern eine neue angewandt, die darin besteht, dass die Entwickelung in zwei Schritten vorgenommen wird, wodurch sich das zweidimensionale Problem auf zwei eindimensionale reduziert. — Es sei noch bemerkt, dass wir für das Integrationsgebiet einer Integralgleichung die Bezeichnung „Grundgebiet“ einführen.

---

[1]) Math. Ann., Bd. 63.

[2]) Rendiconti del Circ. Math. di Palermo, 1909.

[3]) Juretzka, Diss., Breslau, 1909.

1. Kapitel.

Schwingungen eines elastischen Stabes von veränderlichem Querschnitt.

Die Differentialgleichung für die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes von veränderlichem Querschnitt lautet nach Kirchhoff, Ges. Abhandl., S. 339 ff.

$$\frac{\delta^2}{\delta z^2}\left(z^{3m+n}\frac{\delta^2 y}{\delta z^2}\right) = -\,a\cdot z^{m+n}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}.$$

Darin sind a, m, n Konstante, a ist positiv. Der Stab ist eindimensional gedacht und besitzt die Länge l. Ferner ist z die Abscisse eines beliebigen Punktes des Stabes, gemessen von dem Endpunkte z = 0 aus, y bedeutet die Elongation, t die Zeit.

§ 1. Differential- und Integralgleichung beim „spitzen" Stabe.

Der „spitze" Stab ist begrenzt von 2 parallelen Ebenen und von 2 Ebenen, die einen sehr spitzen Winkel mit einander bilden. In diesem Falle ist

$$m = 1, \qquad n = 0.$$

Die Gleichung lautet nun

1) $$\frac{\delta^2}{\delta z^2}\left(z^3\frac{\delta^2 y}{\delta z^2}\right) = -\,az\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}.$$

Um die Konstante a zum Wegfall zu bringen, kann man

$$z = \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad x = z\sqrt{a}$$

setzen. Dann folgt

2) $$\frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(x^3\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\right) = -\,x\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}.$$

Behufs Bildung von Partikularlösungen wird y in 2 Faktoren zerlegt, deren jeder nur von einer der Variabeln x und t abhängt.

3) $$y = u(x)\begin{cases}\sin(k\cdot t)\\ \cos(k\cdot t)\end{cases}.$$

Dabei ist k eine Konstante, und für u(x) ergibt sich

4) $$(x^3u^{II})^{II} = k^3 \cdot x \cdot u;$$

z geht von 0 bis l, daher x von 0 bis $l\sqrt{a} = c$.

Am Endpunkte $x = 0$ sei nun der Stab frei, bei $x = c$ aber eingespannt. Die Randbedingungen haben dann die Form[1])

5) $$\begin{aligned} x = 0: &\quad x^3u^{II} = 0, \quad (x^3u^{II})^I = 0 \\ x = c: &\quad u = 0, \qquad u^I = 0. \end{aligned}$$

Um von der Differentialgleichung 4) zu einer Integralgleichung zu gelangen, führen wir eine Greensche Funktion K(x,ξ) ein, die dann als Kern der Integralgleichung erscheint. K(x,ξ) genügt der Gleichung

6) $$(x^3K^{II})^{II} = 0,$$

erfüllt die Randbedingungen und ist nebst den ersten beiden Ableitungen im Grundgebiete 0..c der Variabeln x und ξ stetig, während die dritte Ableitung die Unstetigkeit

$$\frac{d^3}{dx^3}[K(x,\xi)]\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = +\frac{1}{\xi^3}$$

aufweist. Die Greensche Formel lautet, wenn zur Abkürzung

$$(x^3f^{II})^{II} \equiv L(f)$$

gesetzt wird.

$$\int_0^c [vL(u) - uL(v)]dx = P(u,v)\Big|_{x=0}^{x=c}$$

$$\equiv x^3(vu^{III} - v^Iu^{II} + v^{II}u^I - v^{III}u) + 3x^2(vu^{II} - v^{II}u)\Big|_{x=0}^{x=c}.$$

Die Randbedingungen sind Greensche, d. h. für zwei ihnen genügende, im Grundgebiete mit ihren ersten 4 Ableitungen stetige Funktionen u und v verschwindet der Ausdruck $P(u,v)\Big|_0^c$.

Die Integralgleichung erhält man jetzt sofort, wenn man in der Greenschen Formel

$$u = u(x), \quad v = K(x,\xi)$$

[1]) Kirchhoff, l. c., S. 344.

setzt. Unter Berücksichtigung der Unstetigkeit in der dritten Ableitung von $K(x,\xi)$ ergibt sich leicht

$$u(x) = -k^2 \int_0^c \xi u(\xi)\, K(x,\xi)\, d\xi$$

oder, wenn

$$-k^2 = +\lambda$$

gesetzt wird,

$$7) \qquad u(x) = \lambda \int_0^c \xi u(\xi) K(x,\xi) d\xi .$$

Diese Gleichung wird auf die bekannte Form gebracht, indem man die Funktionen

$$v(x) = \sqrt{x}\, u(x); \quad G(x,\xi) = \sqrt{x \cdot \xi} K(x,\xi)$$

einführt. Dann folgt

$$8) \qquad v(x) = \lambda \int_0^c v(\xi)\, G(x,\xi) d\xi .$$

Da $K(x,\xi)$ als Greensche Function, mithin auch $G(x,\xi)$ in x und ξ symmetrisch sind, da ferner G ebenso wie K in der dritten Ableitung unstetig wird, so existieren, was aus der Theorie der Integralgleichungen[1]) bekannt ist, ∞ Eigenfunktionen $v_\nu(x)$ mit den zugehörigen Eigenwerten λ_ν, mithin auch die $u_\nu(x)$.

Von der Gleichung 7) ausgehend, kann man durch blosse Differentiationen zu 4) zurückgelangen. Daraus folgt, dass die Lösungen der Integralgleichung und die den Randbedingungen genügenden Lösungen der Differentialgleichung identisch sind. Aus der Theorie der Integralgleichungen ist bekannt, dass die Eigenfunktionen $v(x)$ zu einander orthogonal sind, d. h. es ist

$$\int_0^c v_\nu(x) v_\mu(x) dx = 0$$

[1]) **Kneser, Th. der Int. = gl.**

oder $\int_0^c x u_\nu(x) u_\mu(x) dx = 0$, wenn $\nu \neq \mu$. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man in der Greenschen Formel

$$u = u_\nu(x), \quad v = u_\mu(x)$$ setzt.

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_\nu(x) = \frac{v_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^c v_\nu^2(\alpha) d\alpha}},$$

$$\psi_\nu(x) = \frac{u_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^c \alpha u_\nu^2(\alpha) d\alpha}}.$$

Für sie gilt

$$\int_0^c \varphi_\nu^2(\alpha) d\alpha = \int_0^c \alpha \psi_\nu^2(\alpha) d\alpha = 1.$$

§ 2. Entwickelung stetiger, den Randbedingungen genügender Funktionen.

Die willkürliche Funktion $f(x)$ habe im Grundgebiete 4 stetige Ableitungen und erfülle die Randbedingungen. Ferner sei der Differentialausdruck $\frac{L(f)}{\sqrt{x}}$ auch an der Stelle $x = 0$ endlich und stetig.

Dann kann

$$L(f) \equiv (x^3 f^{II})^{II} = -\sqrt{x} p(x)$$

gesetzt werden, wo $p(x)$ eine im Grundgebiete stetige Funktion bedeutet. Die Greensche Formel liefert dann, wenn man

$$u = f(x), \quad v = K(x,\xi)$$

substituiert, die „quellenmässige“ Darstellung:

$$f(x) = \int_0^c \sqrt{\xi}\, p(\xi) K(x,\xi) d\xi$$ oder

$$\sqrt{x}\,f(x) = \int_0^c p(\xi) G(x,\xi)\,d\xi.$$

Nach Schmidt[1]) oder Kneser[2]) kann nunmehr $\sqrt{x}\,f(x)$ in eine nach den Eigenfunktionen des Kernes $G(x,\xi)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden:

$$\sqrt{x}\,f(x) = \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu(x)$$

$$f(x) = \sum_\nu a_\nu \psi_\nu(x)\,.$$

Dabei ist

$$a_\nu = \int_0^c \sqrt{\alpha}\,\varphi_\nu(\alpha) f(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int_0^c \alpha \psi_\nu(\alpha) f(\alpha)\,d\alpha.$$

Die obigen Reihen sind im Grundgebiet gleichmässig und absolut konvergent. Uebrigens kann man, wenn man umgekehrt $f(x)$ durch die quellenmässige Darstellung definiert, zum Differentialausdruck zurückgelangen.

§ 3. Entwickelung unstetiger, den Randbedingungen nicht genügender Funktionen.

Um auch unstetige Funktionen, welche die Randbedingungen nicht erfüllen, nach der Kneserschen Methode zu entwickeln, müssen wir Eigenfunktionen und Eigenwerte konkret darstellen. Die Gleichung 4) des § 1 hat 4 partikuläre Lösungen, von denen jedoch 2 nicht in Betracht kommen, weil sie an der Stelle $x = 0$ unendlich werden. Aus den beiden andern gewinnt man die Eigenfunktionen $u_\nu(x)$ in der für unsere Zwecke brauchbaren Form

[1]) Schmidt, l. c., § 9.
[2]) Kneser, Theorie der Int. = gl. § 41.

1) $$\mu_\nu(x) = J_0(2\sqrt{k_\nu c})\,\frac{d}{dx}\,X_0(2\sqrt{k_\nu x}) + X_0(2\sqrt{k_\nu c})\,\frac{d}{dx}\,J_0(2\sqrt{k_\nu x}).$$

Hierin bedeuten J_0 und X_0 die Besselschen Funktionen von der Ordnung 0 mit reellem resp. rein imaginärem Argument.

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \ldots$$

$$X_0(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \ldots$$

Der Index 0 wird der Einfachheit halber von jetzt an weggelassen. Die k_ν sind Wurzeln der transzendenten Gleichung.

2) $$\frac{d}{dc}\,[J(2\sqrt{k_\nu c})\;X(2\sqrt{k_\nu c})] = 0.$$

Für den Kern erhält man nach bekannter Methode

3) $$K(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\xi}{2c^2} - \dfrac{x+\xi}{c} + \dfrac{x}{2\xi} + 1\left(\dfrac{\xi}{c}\right) + 1 \text{ für } x < \xi \\ \dfrac{x\xi}{2c^2} - \dfrac{x+\xi}{c} + \dfrac{\xi}{2x} + 1\left(\dfrac{x}{c}\right) + 1 \text{ für } x > \xi, \end{cases}$$

wodurch die Symmetrie evident wird. Der Endpunkt $x = c$ ist regulär, $x = 0$ aber singulär, und es wird $K(x,\xi)$ für $x = \xi = 0$ unendlich gross, während $G(x,\xi)$ endlich bleibt. Nun kann eine willkürliche Funktion, welche mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetig ist und den Randbedingungen nicht zu genügen braucht, nach den Eigenfunktionen entwickelt werden, wie Juretzka[1]) in Erweiterung der Kneserschen Methode für Differentialgleichungen 4. Ordnung gezeigt hat, wenn folgende Formeln gelten:

A) $$K(x,\xi) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

B) $$K'(x,\xi) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu'(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

[1]) Juretzka, l. c.

C) $$K''(x,\xi) = \sum_{\nu} \frac{\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu}$$

D) $$K'''(x,\xi) = \sum \frac{\psi'''_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} \qquad \text{für } x \neq \xi$$

E) $$\frac{1}{2}\,[K'''(x-0,x) + K'''(x+0,x)] = \sum_{\nu} \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu}.$$

Die Gleichung A) ist richtig, wenn die Reihe auf der rechten Seite im Grundgebiete der Variabeln x und ξ gleichmässig konvergiert. Das ist allerdings hier nicht der Fall; die Reihe wird vielmehr für das Wertepaar $x = 0$, $\xi = 0$ divergent, was mit dem Unendlichwerden des Kernes übereinstimmt. Man kann jedoch die Gültigkeit der Formel in einem Intervall ε..c nachweisen, wo ε eine beliebig kleine aber feste positive Grösse ist, indem man auf den iterierten Kern $K^2(x,\xi)$ zurückgeht.

Zunächst leiten wir eine Differentialgleichung zwischen $K(x,\xi)$ und $K^2(x,\xi)$ ab.

Ist $[x^3F''(x)]'' = -xf(x)$, so folgt

$$F(x) = \int_0^c \xi f(\xi)\,K(x,\xi)\,d\xi.$$

Umgekehrt erhält man auch aus dieser Gleichung jene. Setzt man nun

$$f(x) = K(x,\xi), \qquad \text{so ist}$$

$$F(x) = \int_0^c \alpha K(\xi,\alpha)\,K(x,\alpha)d\alpha = K^2(x,\xi).$$

Mithin $$\frac{d^2}{dx^2}\left[x^3\,\frac{d^2}{dx^2}\,K^2(x,\xi)\right] = -xK(x,\xi).$$

Diese Gleichung gilt, da die Funktion f(x) im Grundgebiete endlich und stetig sein muss, zunächst nur für

$$0 \leqq x \leqq c, \quad 0 < \xi \leqq c,$$

wegen der Symmetrie aber auch für

$$0 < x \leqq c, \quad 0 \leqq \xi \leqq c.$$

Für $x = \xi = 0$ verschwindet die rechte Seite, wie aus der konkreten Darstellung des Kernes $K(x,\xi)$ leicht ersichtlich ist. Ueber die linke ist folgendes zu sagen. Der Kern $K^2(x,\xi)$ ist nebst seinen ersten 3 Ableitungen auch an der Stelle $x = \xi = 0$ endlich. Man kann das beweisen, indem man ihn berechnet und 3 mal differentiert. Es geht aber auch daraus hervor, dass die Reihen

$$\sum_\nu \frac{\psi_\nu'(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}, \quad \sum_\nu \frac{\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}, \quad \sum_\nu \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2},$$

welche, wie später bewiesen wird, soweit sie gleichmässig konvergent sind, die Ableitungen von $K^2(x,\xi)$ darstellen, nicht bloss im Bereiche $\varepsilon..c$, sondern auch im Bereiche $0..c$ der Variabeln x und ξ gleichmässig konvergieren. Sie verhalten sich nämlich in diesem Bereiche wie

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu^4}, \quad \sum_\nu \frac{1}{\nu^3}, \quad \sum_\nu \frac{1}{\nu^2}.$$

Da nun $\frac{d^2}{dx^2} K^2(x,\xi)$ für $x = \xi = 0$ endlich ist, so verschwindet der Ausdruck $\frac{d^2}{dx^2}\left[x^3 \frac{d^2}{dx^2} K^2(x,\xi)\right]$ für dieses Wertepaar, und die Gleichung gilt auch an dieser Stelle.

$K^2(x,\xi)$ ist bekanntlich Kern einer Integralgleichung mit den Eigenfunktionen $\psi_\nu(x)$ und den Eigenwerten λ_ν^2. Daher ist

F) $$K^2(x,\xi) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2},$$

wenn die Reihe rechts im Grundgebiete von x und ξ gleichmässig konvergiert. Ferner ergeben sich durch gliedweise Differentiation die Formeln

G) $$\frac{d}{dx} K^2(x,\xi) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu'(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}$$

H) $$\frac{d^2}{dx^2} K^2(x,\xi) = \sum_\nu \frac{\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}$$

für das Intervall $\varepsilon..c$, wenn die Reihen in diesem Intervalle gleichmässig konvergieren. Weiter ist

$$\left[\sum \frac{x^3\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}\right]' = \sum \frac{(x^3\psi_\nu'')'\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2},$$

wenn letztere Reihe oder wenn

J) $$\sum_\nu \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}$$

im Intervalle $\varepsilon..c$ gleichmässig konvergiert, und schliesslich

$$\left[\sum \frac{x^3\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}\right]'' = \sum \frac{(x^3\psi_\nu'')''\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2} = -\sum \frac{x\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

sobald diese Reihe in demselben Intervalle gleichmässig konvergiert. Es ist aber

$$[x^3[K^2(x,\xi)]'']'' = \left[\sum \frac{x^3\psi_\nu''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2}\right]'' = -x\,K(x,\xi).$$

Daher folgt

$$-x\,K(x,\xi) = -\sum \frac{x\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu},$$

d. h. die Formel A). Hieraus ergibt sich die Giltigkeit von B) und C), wenn die betreffenden Reihen im Intervalle $\varepsilon..c$ gleichmässig konvergieren. Die Reihe D) wird in demselben Intervalle nur dann konvergent sein, wenn $x \lesseqgtr \xi$. Die Reihe E) wiederum konvergiert bloss in einem Intervalle im Innern von $0..c$, also auch mit Ausschluss des regulären Endpunktes c. Endlich wird noch die Formel

K) $$x^3\left[\sum \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu} - K'''(x+0,x)\right]\Bigg|^{x=0} = +1$$

bewiesen werden.

Die Formeln A bis J) ermöglichen eine Entwickelung im Innern des Grundgebietes, während durch K) dieselbe

auf den singulären Endpunkt 0 ausgedehnt wird. Im Punkte c kann eine die Randbedingungen nicht erfüllende Funktion offenbar nicht entwickelt werden, weil an dieser Stelle die Eigenfunktionen verschwinden.

§ 4. Asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen und Eigenwerte.

Bei der Führung der Konvergenzbeweise werden für die Eigenfunktionen und Eigenwerte asymptotische Darstellungen benutzt, die jetzt abgeleitet werden sollen.

$I_n(x)$ sei die Besselsche Funktion 1. Gattung nter Ordnung mit reellem Argument. Es ist also

$$1)\; I_n(x) \equiv \frac{x^n}{2\cdot 4\,..\,2n}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)}\cdots\right\},$$

$n = 0,1,2\,..$

und es gilt die Differentialgleichung

$$I_n'' + \frac{1}{x} I_n' - \left(\frac{n^2}{x^2} - 1\right) I_n = 0.$$

Dann ist die asymptotische Darstellung

$$2) \qquad I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\cdot x}}\left\{\cos\left[\frac{2n+1}{4}\pi - x\right] + \frac{\psi}{x}\right\}$$

richtig für $x \geqq \varepsilon$. Dabei ist ψ das Symbol für eine Grösse, die zwischen endlichen, von x unabhängigen Grenzen verbleibt. Da

$$I_n' = \frac{1}{2}\left[I_{n-1} + I_{n+1}\right]$$

ist, folgt leicht

$$3) \qquad I_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left[\frac{2n+1}{4}\pi - x\right] + \frac{\psi}{x}\right\}.$$

Die Darstellung der Besselschen Funktionen mit rein imaginärem Argument werde nach einer von Kneser[1]) herrührenden Methode behandelt. Die Funktion

$$4)\; X_n(x) = \frac{x^n}{2\cdot 4\,..\,2n}\left\{1 + \frac{x^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)}\,..\right\}$$

[1]) Crelles Journal, Bd. 116.

genügt der Gleichung

$$X_n'' + \frac{1}{x} X_n' - \left(\frac{n^2}{x^2} + 1\right) X_n = 0.$$

Setzt man $\sqrt{x} X_n = y$, so kommt

$$y'' - y\left(\frac{n^2}{x^2} - \frac{3}{4}\right) = 0.$$

2 Partikularlösungen sind

I) $$y_1 = e^x \left[\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x} + .. \frac{\gamma_m}{x^m} + \frac{w}{x^{m+1}}\right]$$

II) $$y_2 = e^{-x} \left[\delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + .. \frac{\delta_m}{x^m} + \frac{u}{x^{m+1}}\right].$$

$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{x} + .., \delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + ..$ sind divergente Reihen, welche die Bezeichnung semikonvergent führen, weil sie zur asymptotischen Darstellung geeignet sind. Ferner bedeutet m eine beliebige positive, ganze Zahl. Setzt man

$$\gamma_0 = \delta_0 = 1,$$

so folgt

$$\gamma_1 = \frac{1^2 - 4n^2}{1!\,8}, \quad \gamma_2 = \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)}{2!\,8^2}, \quad \ldots$$

$$\delta_{2k} = \gamma_{2k}, \quad \delta_{2k+1} = -\gamma_{2k+1},$$

w und u sind die Lösungen unhomogener Differentialgleichungen 2. Ordnung. Sie sind endlich, sobald $x \geqq \varepsilon$ ist, liegen also zwischen Grenzen, die von x unabhängig, nur von ε abhängig sind. Insbesondere ist

$$\lim_{x=\infty} w = \gamma_{m+1}; \quad \lim_{x=\infty} u = \delta_{m+1}.$$

Die Gleichungen I) und II) gelten natürlich nur oberhalb des Wertes $x = \varepsilon$. Wenn

$$\bar{y}_2 = e^{-x} \left[\delta_0 + \frac{\delta_1}{x} + .. \frac{\delta_p}{x^p} + \frac{\bar{u}}{x^{p+1}}\right],$$

wobei $p \neq m$,

so ist $\bar{y}_2 \equiv y_2$.

Wenn aber $\bar{y}_1 = e^{+x} \left[\gamma_0 + ... \frac{\gamma_q}{x^q} + \frac{\bar{w}}{x^{q+1}}\right]$,

wobei $q \neq m$,

so ist $\bar{y}_1$ nicht mit y_1 identisch, sondern

$$\bar{y}_1 \equiv y_1 + C \cdot y_2,$$

worin C eine Konstante bedeutet. Bei variablem m wird also durch I) eine Gruppe von Integralen dargestellt, die alle für $x = \infty$ selbst unendlich werden, durch II) jedoch nur ein einziges Integral, das für $x = \infty$ verschwindet.

Das allgemeine Integral der Gleichung für y ist

$$y = A \cdot y_1 + B \cdot y_2,$$

ein partikuläres also

$$\sqrt{x}\, X_n = C y_1 + D y_2,$$

wo C und D bestimmte Konstanten sind:

$$\sqrt{x}\, X_n = C e^{+x} \left\{1 + \left[\frac{\gamma_1}{x} + \ldots \frac{\gamma_m}{x^m} + \frac{w}{x^{m+1}}\right]\right\}$$

$$+ D e^{-x} \left\{1 + \left[\frac{\delta_1}{x} + \ldots \frac{\delta_m}{x^m} + \frac{u}{x^{m+1}}\right]\right\}.$$

Die Klammern [..] werten offenbar bei grossem x klein von der Ordnung 1 in Bezug auf $\frac{1}{x}$. Wir machen jetzt von folgender Ungleichung Gebrauch:

$$\left|\gamma_1 + \frac{\gamma_2}{x} + \ldots \frac{\gamma_m}{x^{m-1}} + \frac{w}{x^m}\right| \leqq \left|\gamma_1\right| + \left|\frac{\gamma_2}{x}\right| + \ldots \left|\frac{w}{x^m}\right|$$

$$\leqq \left|\gamma_1\right| + \ldots \left|\frac{\gamma_m}{\varepsilon^{m-1}}\right| + \left|\frac{w}{\varepsilon^m}\right|.$$

Flgl. liegt $\left(\gamma_1 + \ldots \ldots \frac{\gamma_m}{x^{m-1}} + \frac{w}{x^m}\right)$ zwischen endlichen von x unabhängigen Grenzen, kann also mit ψ bezeichnet werden. Ferner ist

$$e^{-x} \left(1 + \frac{\delta_1}{x} + \ldots \frac{\delta_m}{x^m} + \frac{u}{x^{m+1}}\right) =$$

$$e^{+x} \cdot e^{-2x} (\ldots) = e^{+x} \cdot \frac{\psi}{x}$$

$$\text{Mithin } \sqrt{x}\, X_n = Ce^{+x}\left\{1+\frac{\psi}{x}\right\} + De^{+x}\cdot\frac{\psi}{x}$$

$$= Ce^{+x}\left\{1+\frac{\psi}{x}\right\}.$$

Da endlich für C der Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ermittelt werden kann, was übrigens für Konvergenzfragen belanglos ist, so erhält man

5) $$X_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1+\frac{\psi}{x}\right\} \text{ für } x \geqq \varepsilon.$$

Aus der Beziehung

$$X_n' = \frac{1}{2}\left[X_{n-1} + X_{n-1}\right] \quad \text{folgt}$$

6) $$X_n'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1+\frac{\psi}{x}\right\} \text{ für } x \geqq \varepsilon.$$

Nach dieser Vorbereitung ist die Darstellung der Eigenfunktionen und Eigenwerte einfach. Zur Abkürzung setzen wir

$$2\sqrt{k_\nu c} = \alpha_\nu, \quad 2\sqrt{k_\nu x} = z, \quad 2\sqrt{k_\nu \xi} = \zeta.$$

Dann ist $z = \alpha_\nu\sqrt{\frac{x}{c}}$, $\zeta = \alpha_\nu\sqrt{\frac{\xi}{c}}$, z und ζ variieren zwischen 0 und α. Aus Gleichung 1) des vorigen § ergibt sich jetzt nach einiger Rechnung

$$u_\nu(x) = \frac{\alpha_\nu^2}{2c}\left[J(\alpha)\frac{X'(z)}{z} + X(\alpha)\frac{J'(z)}{z}\right]$$

$$u'_\nu(x) = \frac{\alpha_\nu^4}{4c^2}\left[J(\alpha)\left\{-\frac{2X'(z)}{z^3} - \frac{X(z)}{z^2}\right\}\right.$$

$$\left. + X(\alpha)\left\{-\frac{2J'(z)}{z^3} - \frac{J(z)}{z^2}\right\}\right]$$

$$u_\nu''(x) = \frac{\alpha_\nu^6}{8c^3}\left[J(\alpha)\left\{\frac{8X'(z)}{z^5} - \frac{X'(z)}{z^3} + \frac{4X(z)}{z^4}\right\}\right.$$

$$\left. + X(\alpha)\left\{\frac{8J'(z)}{z^5} - \frac{J'(z)}{z^3} + \frac{4J(z)}{z^4}\right\}\right]$$

$$u_\nu'''(x) = \frac{\alpha_\nu^8}{16c^4}\left[J(\alpha)\left\{-\frac{48X'(z)}{z^7}+\frac{8X'(z)}{z^5}-\frac{24X(z)}{z^6}+\frac{X(z)}{z^4}\right\}\right.$$
$$\left. + X(\alpha)\left\{\frac{48J'(z)}{z^7}+\frac{8J'(z)}{z^5}-\frac{24J(z)}{z^6}+\frac{J(z)}{z^4}\right\}\right].$$

Die normierte Eigenfunktion war

$$\psi_\nu(x) = \frac{u_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)d\gamma}}.$$

Mit Benutzung einiger Integralformeln über Besselsche Funktion [1]) findet man

$$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)d\gamma = -\frac{\alpha^2}{2} J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha).$$

Aus Obigen ergibt sich jetzt ohne weiteres die asymptotische Darstellung der Eigenfunktionen. Um dasselbe für die Eigenwerte zu leisten, gehen wir von der Gleichung 2) des § 3 aus. Sie lautet in den neuen Bezeichnungen

$$\frac{d}{d\alpha}[J(\alpha)\cdot X(\alpha)] = 0 \qquad \text{oder}$$
$$I(\alpha)X'(\alpha) + X(\alpha)J'(\alpha) = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\left\{\cos\alpha+\sin\alpha+\frac{\psi}{\alpha}\right\}\frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left\{1+\frac{\psi}{\alpha}\right\}+$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}}\left\{\cos\alpha-\sin\alpha+\frac{\psi}{\alpha}\right\}\frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left\{1+\frac{\psi}{\alpha}\right\} = 0,$$
$$\cos\alpha + \frac{\psi}{\alpha} = 0,$$

$\cos\alpha = 0$ für grosse α. Daraus folgt

$$\alpha_n = \left(\frac{2n+1}{2}+k\right)\pi + \varepsilon_n, \qquad \underline{n = 0,1\ldots}$$

wobei $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ und k eine feste, d. h. von n unabhängige ganze Zahl ist. Setzt man zur genaueren Bestimmung von

[1]) Riemann-Weber, Part. Diff.-gl. der math. Phys. Bd. 2.

ε_n den für α_n gefundenen Wert in der Gleichung wieder ein, so ergibt sich leicht, dass ε_n klein von der Ordnung 1 in Bezug auf $\frac{1}{2n+1}$ wird, d. h. es ist

$$\varepsilon_n = \frac{\psi}{2n+1},$$

$$\alpha_n = \left(\frac{2n+1}{2} + k\right)\pi + \frac{\psi}{2n+1},$$

ferner

$$k_n = \frac{\alpha_n^2}{4c}$$

$$\lambda_n = -\frac{\alpha_n^4}{16c^2}.$$

§ 5. Die Konvergenzbeweise.

Die Reihe A) des § 3 soll im Intervalle $\varepsilon..c$ der Variabeln x und ξ konvergieren. Es ist

$$\sum_\nu \frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} = \sum \frac{u_\nu(x)u_\nu(\xi)}{\lambda_\nu \int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)d\gamma}.$$

Diese Reihe reduziert sich, abgesehen von konstanten Faktoren, auf

$$\sum \frac{[J(\alpha)X'(z) + X(\alpha)J'(z)]\,[J(\alpha)X'(\zeta) + X(\alpha)J'(\zeta)]}{z\zeta\alpha^2 J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}.$$

Man kann hieraus 4 Reihen bilden

$$1)\ \sum \frac{J(\alpha)X'(z)X'(\zeta)}{z\zeta\alpha^2 J_2(\alpha)X^2(\alpha)};\quad 2)\ \sum \frac{J'(z)J'(\zeta)}{z\zeta\alpha^2 J(\alpha)J_2(\alpha)}$$

$$3)\ \sum \frac{X'(z)J'(\zeta)}{z\zeta\alpha^2 J_2(\alpha)X(\alpha)};\quad 4)\ \sum \frac{J'(z)X'(\zeta)}{z\zeta\alpha^2 J_2(\alpha)X(\alpha)}.$$

1) Aus den Gleichungen 5) und 6) des § 4 ergibt sich leicht

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X'(z)}{X(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{für } z < \alpha \\ 1 & \text{für } z = \alpha, \end{cases}$$

und nach Gleichung 2) ist $\lim_{\nu=\infty} \frac{J(\alpha)}{J_2(\alpha)} = -1.$

Die Reihe 1) konvergiert also gleichmässig, wenn $\sum \frac{1}{z\zeta\alpha_\nu^2}$ oder $\frac{1}{\sqrt{x\cdot\xi}} \sum \frac{1}{\alpha_\nu^4}$ absolut und gleichmässig konvergiert. Der bezüglich der Summation konstante Faktor $\frac{1}{\sqrt{x\xi}}$ ist harmlos, da x und ξ oberhalb ε liegen. Die Reihe konvergiert also wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^4}$ oder wie $\sum \frac{1}{(2\nu+1)^4}$.

2) Es ist

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{J'(z)}{J(\alpha)} \right| = \sqrt[4]{\frac{c}{x}} \, |(\cos z - \sin z)|$$

und

$$\lim_{\nu=\infty} \left| \frac{J'(\zeta)}{J_2(\alpha)} \right| = \sqrt[4]{\frac{c}{\xi}} \, |(\cos\zeta - \sin\zeta)|.$$

Die Reihe 2) konvergiert daher wie $\sum \frac{1}{z\zeta\alpha_\nu^2}$.

Ebenso konvergieren die Reihen 3) und 4), da auch bei ihnen entsprechende Quotienten unterdrückt werden können.

Die Reihe B) liefert $\sum \frac{u_\nu'(x)u_\nu(\xi)}{\lambda_\nu \int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)d\gamma}$ oder, von konstanten Faktoren abgesehen,

$$\sum \frac{\left[J(\alpha)\left\{-\frac{2X'(z)}{z^3} - \frac{X(z)}{z^2}\right\} + X(\alpha)\left\{-\frac{2J'(z)}{z^3} - \frac{J(z)}{z^2}\right\}\right] \times \left[J(\alpha)\frac{X'(\zeta)}{\zeta} + X(\alpha)\cdot\frac{J'(\zeta)}{\zeta}\right]}{J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}$$

Von den 8 Reihen, die sich aus obiger ergeben, greifen wir diejenige heraus, bei der die Summe der Exponenten von z und ζ im Nenner am kleinsten ist, die also am schlechtesten konvergiert:

$$\sum \frac{J(\alpha)X(z)J(\alpha)X'(\zeta)}{\zeta z^2 J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}.$$

Nun ist $\frac{X(z)}{X(\alpha)} \leqq 1$, was ein Blick auf die Reihen

$$X(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \ldots$$

$$X(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{2^2 \cdot 4^2} + \ldots$$

bestätigt. Daher konvergiert die Reihe wie $\sum \frac{1}{\zeta z^2}$ oder wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^3}$. Die andern 7 Reihen konvergieren ebenso gut oder besser. Die Reihe C) ergibt $\sum \frac{u_\nu''(x) u_\nu(\xi)}{\lambda_\nu \int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma}$. Diese Reihe kann in 12 andere zerlegt werden, von denen wir lediglich $\sum \frac{\alpha^2 J^2(\alpha) X'(z) X'(\zeta)}{\zeta z^3 J(\alpha) J_2(\alpha) X^2(\alpha)}$ betrachten. Sie konvergiert offenbar wie $\sum \frac{\alpha_\nu^2}{\zeta z^3}$ oder wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^2}$, die 11 übrigen Reihen ebenso gut oder besser. Die Reihen G) und H), bei denen das Quadrat des Eigenwertes im Nenner erscheint, konvergieren wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^7}$ resp. $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^6}$, die Reihe J) natürlich wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^5}$.

Wir wenden uns jetzt der Reihe F) zu. Sie konvergiert im Intervalle $\varepsilon..c$ wie $\sum \frac{1}{\alpha_\nu^8}$. Die Konvergenz muss aber für das Intervall $0..c$ erwiesen werden. Die Funktionen von z und ζ können nicht mehr asymptotisch dargestellt werden, da diese Darstellung im Punkte 0 ihre Gültigkeit verliert.

Die Reihe F führt zu $\sum \frac{u_\nu(x) u_\nu(\xi)}{\lambda^2 \int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma}$ oder

$$\sum \frac{[J(\alpha)X'(z) + X(\alpha)J'(z)]\,[J(\alpha)X'(\zeta) + X(\alpha)J'(\zeta)]}{z\zeta\alpha^6 J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}.$$

Diese Reihe kann wieder in folgende 4 zerlegt werden:

$$1)\ \sum \frac{J(\alpha)X'(z)X'(\zeta)}{z\zeta\alpha^6 J_2(\alpha)X^2(\alpha)};\qquad 2)\ \sum \frac{J'(z)J'(\zeta)}{z\zeta\alpha^6 J(\alpha)J_2(\alpha)}$$

$$3)\ \sum \frac{X'(z)J'(\zeta)}{z\zeta\alpha^6 J_2(\alpha)X(\alpha)};\qquad 4)\ \sum \frac{J'(z)X'(\zeta)}{z\zeta\alpha^6 J_2(\alpha)X(\alpha)}$$

1) Da $\dfrac{X'(z)}{z} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{z^2}{2^2\cdot 4} + \dfrac{z^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \ldots$

und $X(\alpha) = 1 + \dfrac{\alpha^2}{2^2} + \dfrac{\alpha^4}{2^2\cdot 4^2} + \ldots,$

so besteht die Ungleichung

$$\frac{X'(z)}{zX(\alpha)} < 1 \text{ und ebenso } \frac{X'(\zeta)}{\zeta X(\alpha)} < 1.$$

Mithin konvergiert die Reihe 1) wie $\sum \dfrac{1}{\alpha_\nu{}^6}$.

2) Für $\dfrac{J'(z)}{z}$ findet man leicht die Reihe

$$-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^2\cdot 4} - \frac{z^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \ldots,$$

welche für jedes reelle z, sei es endlich oder unendlich, konvergiert. $\dfrac{J'(z)}{z}$ liegt somit zwischen endlichen, von z unabhängigen Grenzen. Ferner ist

$$\lim_{\nu=\infty} |\,\alpha J(\alpha)J_2(\alpha)\,| = \frac{2}{\pi}\,\frac{1+\sin 2\alpha}{2} \leqq \frac{2}{\pi}.$$

Die Reihe 2) konvergiert also wie $\sum \dfrac{1}{\alpha_\nu{}^5}$. Die Reihen 3) und 4) konvergieren wie $\sum \dfrac{1}{\alpha_\nu{}^{5\frac{1}{2}}}$. Die Reihe F) konvergiert also absolut und gleichmässig im ganzen Grundgebiete.

Aus der Reihe D) $\sum \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu} = \sum \frac{u_\nu'''(x)u_\nu(\xi)}{\lambda_\nu \int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)\,d\gamma}$

erhält man, von konstanten Faktoren abgesehen:

$$\sum \alpha_\nu{}^{10}\left[J(\alpha)\left\{-\frac{48X'(z)}{z^7}+\frac{8X'}{z^5}-\frac{24X}{z^6}+\frac{X}{z^4}\right\}+ X(\alpha)\left\{-\frac{48J'}{z^7}+\frac{8J'}{z^5}-\frac{24J}{z^6}+\frac{J}{z^4}\right\}\right]\times \frac{\left[J(\alpha)\frac{X'(\zeta)}{\zeta}+X(\alpha)\frac{J'(\zeta)}{\zeta}\right]}{\alpha_\nu{}^6 J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}.$$

Hierin ist nur die Reihe zweifelhaft, bei der die Summe der Exponenten von z und ζ im Nenner am kleinsten ist:

$$\sum \frac{\alpha_\nu{}^4[J(\alpha)X(z)+X(\alpha)J(z)]\;[J(\alpha)X'(\zeta)+X(\alpha)J'(\zeta)]}{z^4\cdot\zeta\cdot J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)} \text{ oder}$$

$$\sum \frac{[J(\alpha)X(z)+X(\alpha)J(z)]\;[J(\alpha)X'(\zeta)+X(\alpha)J'(\zeta)]}{\alpha J(\alpha)J_2(\alpha)X^2(\alpha)}.$$

Hieraus entstehen 4 Reihen:

1) $\sum \frac{J(\alpha)X(z)X'(\zeta)}{\alpha J_2(\alpha)X^2(\alpha)}$; 2) $\sum \frac{X(z)J'(\zeta)}{\alpha J_2(\alpha)X(\alpha)}$

3) $\sum \frac{J(z)X'(\zeta)}{\alpha J_2(\alpha)X(\alpha)}$; 4) $\sum \frac{J(z)J'(\zeta)}{\alpha J(\alpha)J_2(\alpha)}$.

1) Da $\lim_{\nu=\infty} \frac{J(\alpha)}{J_2(\alpha)} = -1$ ist, wird man zu $\sum \frac{X(z)X'(\zeta)}{\alpha X^2(\alpha)}$ geführt. Nun war vorausgesetzt, dass $z \neq \zeta$ sei. Daher ist entweder z oder ζ kleiner als α.

Sei $\zeta < \alpha,\quad z \leqq \alpha;$

$\xi < c,\quad x \leqq c.$

Ferner hat man $\frac{X(z)}{X(\alpha)} \leqq 1$ und

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X'(\zeta)}{X(\alpha)} = \lim_{\nu=\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\zeta}}\cdot e^{(\zeta-\alpha)}.$$

Die Reihe 1) konvergiert also absolut und gleichmässig, wenn diese Eigenschaft für $\sum \frac{e^{z-\alpha_\nu}}{\alpha_\nu} = \sum \frac{e^{\alpha\left(\sqrt{\frac{\xi}{c}}-1\right)}}{\alpha}$ in einem Intervalle im Innern von 0..c bewiesen ist. Setzt man $\sqrt{\frac{\xi}{c}} - 1 = -d$, so ist d positiv. Die Reihe nimmt jetzt die Form an

$$\sum \frac{1}{\alpha e^{\alpha d}} = \sum \frac{1}{\alpha\left\{1 + \frac{\alpha d}{1!} + \frac{\alpha^2 d^2}{2!} + \ldots\right\}}$$

und konvergiert wie

$$\sum \frac{1}{\alpha^r},$$

wo r eine beliebig grosse positive ganze Zahl ist.

2) Man findet

$$\frac{X(z)}{X(\alpha)} = e^{z-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{z}} \cdot \frac{1+\frac{\psi}{z}}{1+\frac{\psi}{\alpha}} = e^{z-\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{z}}\left(1+\frac{\psi}{\alpha}\right),$$

und es ergibt sich, da $\sqrt{\frac{\alpha}{z}}$ vernachlässigt werden darf, die Reihe

$$\sum \frac{e^{z-\alpha}\left(1+\frac{\psi}{\alpha}\right)J'(\zeta)}{\alpha \cdot J_2(\alpha)} = \sum \frac{e^{z-\alpha}\left(1+\frac{\psi}{\alpha}\right)\left(\cos\zeta - \sin\zeta + \frac{\psi}{\zeta}\right)}{-\alpha\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)}.$$

Zweifelhaft bleibt nur $\sum \frac{e^{z-\alpha}(\cos\zeta - \sin\zeta)}{\alpha\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{4}\right)}$.

Es werde $z-\alpha = \alpha\left(\sqrt{\frac{x}{c}} - 1\right) = -\alpha d$ gesetzt, wobei $d \geqq 0$ sein muss.

I) $d > 0.$

Die Reihe $\sum \frac{\cos\zeta - \sin\zeta}{e^{\alpha d}.\alpha\left(\cos\alpha+\sin\alpha+\frac{\psi}{\alpha}\right)}$ konvergiert gleichmässig und absolut, da $\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}$ für grosse Werte von ν einer endlichen, von 0 verschiedenen Grenze zustrebt.

II) $d = 0$

Wir haben die Reihe $\sum \frac{\cos\zeta - \sin\zeta}{\alpha\left(\cos\alpha+\sin\alpha+\frac{\psi}{\alpha}\right)}$ zu untersuchen. Nun ist, da

$$\alpha_\nu = (2\nu + 1 + 2k)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0 \quad \text{gilt,}$$

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right) = \sin(2\nu + 1 + 2k)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\nu+k}.$$

Setzt man demgemäss

$$\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}} = (-1)^{\nu+k} + \eta_\nu,$$

so findet man für η_ν nach einiger Rechnung den Wert $\frac{\psi}{\alpha_\nu}$, woraus folgt

$$\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}} = (-1)^{\nu+k} + \frac{\psi}{\alpha}.$$

Man wird also geführt zu

$$\sum \frac{\cos\zeta(-1)^{\nu+k}}{\alpha} \text{ und } \sum \frac{\sin\zeta(-1)^{\nu+k}}{\alpha}$$

oder, da $\zeta = \left[(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu\right]\sqrt{\frac{\xi}{c}}$, zu

$$\sum_\nu \frac{(-1)^{\nu+k}\cos(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{c}} \cdot \cos\varepsilon_\nu\sqrt{\frac{\xi}{c}}}{\alpha_\nu},$$

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+k} \sin(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{c}} \sin\varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\xi}{c}}}{\alpha_\nu}$$

und 2 ähnlichen Reihen

Da $\cos\varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\xi}{c}} = 1 + \psi.\varepsilon_\nu^2 = 1 + \frac{\psi}{\alpha_\nu^2}$ und

$$\sin\varepsilon_\nu \sqrt{\frac{\xi}{c}} = \psi.\varepsilon_\nu = \frac{\psi}{\alpha_\nu},$$

bleibt übrig

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+k} \cos(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{c}}}{\alpha_\nu}$$ und

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+k} \sin(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{c}}}{\alpha_\nu}.$$

Es ist aber $\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2}}{(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu}$

$$= \frac{1}{(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2}} [1 + e].$$

Dabei ist $e = \frac{-\varepsilon_\nu}{(2\nu+1+2k)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu} = \frac{\psi}{\alpha_\nu^2}.$

Flgl. ergeben sich die Reihen

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+k} \cos(2\nu+2k+1)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{c}}}{2\nu+2k+1}$$ und

$$\sum_{\nu} \frac{(-1)^{\nu+k} \sin(2\nu+2k+1)\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{c}}}{2\nu+2k+1}$$ oder,

da eine endliche Zahl von Gliedern am Anfang hinzugefügt oder weggelassen werden darf,

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{(-1)^{\nu} \cos(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{c}}}{2\nu+1} \quad \text{und}$$

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{(-1)^{\nu} \sin(2\nu+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{c}}}{2\nu+1}.$$

Setzt man noch $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\xi}{c}} = v$, so ist $0 < v < \frac{\pi}{2}$, und in jedem Intervalle, dessen Grenzen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, konvergieren die Reihen

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{(-1)^{\nu} \cos(2\nu+1)v}{2\nu+1} \quad \text{und} \quad \sum \frac{(-1)^{\nu} \sin(2\nu+1)v}{2\nu+1}$$

gleichmässig.

Der Konvergenzbeweis für die Reihe 3) wird ebenso geführt.

Die Reihe 4) lautet

$$\sum_{\alpha} \frac{\left(\cos z + \sin z + \frac{\psi}{z}\right)\left(\cos\zeta - \sin\zeta + \frac{\psi}{\zeta}\right)}{\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)}$$

Zweifelhaft ist $\sum_{\alpha} \frac{(\cos z + \sin z)(\cos\zeta - \sin\zeta)}{\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)}$.

Aus $\frac{1}{\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)} = (-1)^{\nu+k} + \frac{\psi}{\alpha}$ folgt aber

$$\frac{1}{\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\psi}{\alpha}\right)} = 1 + \frac{\psi}{\alpha}.$$

Uebrig bleibt also $\sum \frac{(\cos z + \sin z)(\cos\zeta - \sin\zeta)}{\alpha}$ oder

I) $\sum \frac{\cos(z+\zeta)}{\alpha}$ und II) $\sum \frac{\sin(z-\zeta)}{\alpha}$.

Aus I) $\sum \frac{\left[\cos(2\nu + 2k + 1)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu\right]\left[\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right]}{\alpha}$

ergibt sich ebenso wie bei der Reihe 2) sukcessive:

$$\sum \frac{\cos(2\nu + 2k + 1)\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right)}{\alpha},$$

$$\sum \frac{\cos(2\nu + 2k + 1)\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right)}{2\nu + 2k + 1},$$

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\cos(2\nu + 1)\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right)}{2\nu + 1}.$$

Die Reihe 2) führt auf

$$\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\sin(2\nu + 1)\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} - \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right)}{2\nu + 1}.$$

In der ersten Reihe werde $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} + \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right) = u$ gesetzt. Dann ist $0 < u < \pi$, und in jedem Intervalle, dessen Grenzen zwischen 0 und π liegen, konvergiert $\sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{\cos(2\nu+1)u}{2\nu+1}$ gleichmässig.

In der zweiten Reihe sei $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} - \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right) = s$. Ist $x > \xi$, so folgt $s > 0$ und zwar $0 < s < \frac{\pi}{2}$. Die Reihe

$\sum_{\nu} \frac{\sin(2\nu+1)s}{2\nu+1}$ konvergiert gleichmässig. Ist aber $x < \xi$, $s < 0$, so werde $t = -s$ eingeführt. Dann ist $0 < t < \frac{\pi}{2}$, und die vorliegende Reihe $-\sum_{\nu} \frac{\sin(2\nu+1)t}{2\nu+1}$ konvergiert wiederum gleichmässig in einem Intervalle, dessen Grenzen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Die Reihe E) ergibt sich aus D), wenn man $z = \zeta$ oder $x = \xi$ setzt. Zweifelhaft sind wieder nur die den Reihen 1), 2), 3), 4) von D) entsprechenden. Die gleichmässige Konvergenz der ersten 3 Reihen folgert man wie oben, indem man noch berücksichtigt, dass x und ξ nicht bis an den Punkt c heranrücken dürfen. Die Reihe 4) aber ist jetzt divergent. Sie zerfällt in die Reihen

$$\text{I*)} \quad \sum \frac{\cos 2z}{\alpha} ; \qquad \text{II*)} \quad \lim_{z=\zeta} \sum \frac{\sin(z-\zeta)}{\alpha} .$$

Aus I*) erhält man

$$\sum \frac{\cos(2\nu+1)\pi\sqrt{\frac{x}{c}}}{\alpha} \quad \text{und} \quad \sum \frac{\sin(2\nu+1)\pi\sqrt{\frac{x}{c}}}{\alpha} .$$

Da $0 < x < c$, so ist $0 < \pi\sqrt{\frac{x}{c}} < \pi$. Somit konvergiert I*) gleichmässig. Die Reihe II*) aber zeigt ein besonderes Verhalten. Sie kann in folgender Form geschrieben werden

$$\lim_{x=\xi} \sum \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{x}{c}} - \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right)\left(\frac{2\nu+1}{2}.\pi + k\pi + \varepsilon_\nu\right)}{\alpha_\nu} .$$

Setzt man $\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{c}} - \sqrt{\frac{\xi}{c}}\right) = s$, so entstehen die beiden Reihen

$$\lim_{s=0} \sin 2k.s \sum \frac{\cos s\left[2\nu+1+\varepsilon_\nu.\frac{2}{\pi}\right]}{\alpha_\nu} = \lim_{s=0} h(s)$$

und $$\lim_{s=0} \cos 2k.s \sum \frac{\sin s\left[2\nu + 1 + \varepsilon_\nu \cdot \frac{2}{\pi}\right]}{\alpha_\nu} = \lim_{s=0} g(s) .$$

Die Funktion h(s) bleibt für $s = 0$ wegen des Faktors $\sin 2k.s$ stetig und nimmt hier den Wert 0 an, während g(s) wieder in zwei Teile gespalten wird,

$$\lim_{s=0} \cos 2ks \sum \frac{\sin(2\nu + 1)s \cos\varepsilon_\nu \cdot \frac{2}{\pi} \cdot s}{\alpha_\nu}$$

und $$\lim_{s=0} \cos 2ks \sum \frac{\cos(2\nu + 1)s \sin\varepsilon_\nu \frac{2}{\pi} s}{\alpha_\nu} .$$

Die letztere Reihe konvergiert an der Stelle $s = 0$, wie man leicht einsieht, wenn man die Gleichung $\varepsilon_\nu = \frac{\psi}{\alpha_\nu}$ berücksichtigt. Ihr Grenzwert ist Null. Die erstere Reihe aber wird divergent, so wie

$$\sum \frac{\sin(2\nu + 1)s}{2\nu + 1} = f(s) .$$

Bekanntlich ist

$$f(0) = \frac{f(+0) + f(-0)}{2} .$$

Setzt man also

$$\cos 2ks \sum \frac{\sin(2\nu + 1)s \cos\varepsilon_\nu \cdot \frac{2}{\pi} \cdot s}{\alpha_\nu} \equiv r(s), \text{ so ist}$$

$$r(0) = \frac{r(+0) + r(-0)}{2} .$$

Daraus folgt sofort

$$\sum \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = \frac{1}{2}\left\{\sum \frac{\psi_\nu'''(x+0)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu} + \sum \frac{\psi_\nu'''(x-0)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right\}.$$

Nun ist $$\sum \frac{\psi_\nu'''(x+0)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = K'''(x + 0,x)$$ und

$$\sum \frac{\psi_\nu'''(x-0)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu} = K'''(x-0,x)$$

wegen Formel D), weil $x+0$ und $x-0$ als von x verschieden anzusehen sind. Daraus ergibt sich die zu beweisende Formel E).

Der Beweis für Gleichung K) ist einfach. Es gilt

$$x^3 \sum \frac{\psi_\nu'''(x)\psi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\Bigg|^{x=0} = 0,$$

weil an der Stelle $x=0$, $x^3=0$, $\psi_\nu(x)=0$, $\psi_\nu'''(x)=$ fin. ist.

Ferner findet man durch eine leichte Rechnung, indem man die konkrete Darstellung des Kernes in § 3 benutzt,

$$x^3K'''(x+0,x)\Big|^{x=0} = -1.$$

Hiermit ist der Beweis für die Richtigkeit der Formeln A) bis K) beendet. Daraus ergibt sich der Satz, dass die Fouriersche Reihe $\sum_\nu \alpha_\nu \psi_\nu(x)$ im allgemeinen die willkürliche Funktion selbst, in einem Unstetigkeitspunkte aber das arithmetische Mittel der beiden Funktionswerte darstellt:

$$\sum \alpha_\nu \psi_\nu(x) = \begin{cases} f(x) \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \end{cases}$$

Damit ist das angestrebte Ziel erreicht.

§ 6. Erzwungene Schwingungen.

Die Differentialgleichung

$$a^2z\frac{\delta^2y}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}\left(z^3\frac{\delta^2y}{\delta z^2}\right) = 0$$

ist massgebend für die freien Schwingungen des Stabes. Setzt man

$$y = \Phi_\nu(z)\begin{cases}\cos(n_\nu t)\\ \sin(n_\nu t)\end{cases},$$

so erhält man für $\Phi_\nu(z)$ die Gleichung

$$(z^3\Phi_\nu'')'' - a^2n_\nu{}^2z\Phi_\nu = 0.$$

Definiert man jetzt den Kern $K(z,\zeta)$ in der bekannten Weise, so ergibt sich weiter

$$\Phi_\nu(z) = \lambda_\nu \int_0^1 K(z,\zeta)\Phi_\nu(\zeta)\zeta d\zeta,$$

wobei $\lambda_\nu = -\,a^2 n_\nu^2$ gesetzt ist.

Die $\Phi_\nu(z)$ seien bereits normiert. Die Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen ist unhomogen und lautet

$$1) \qquad a^2 z \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}\left(z^3 \frac{\delta^2 y}{\delta z^2}\right) = Q(z,t),$$

wobei $Q(z,t)$ eine gegebene Funktion ist. Speziell sei

$$Q(z,t) = U(z)\cos nt + V(z)\sin nt.$$

Die Lösung von 1) wird angesetzt in der Form

$$2) \qquad y = \varphi(z)\cos nt + \chi(z)\sin nt.$$

Die Funktionen φ und χ sind zu bestimmen. Man erhält, wenn man noch

$$\lambda = -\,a^2 n^2 \qquad \text{setzt,}$$

$$\lambda z[\varphi(z)\cos nt + \chi(z)\sin nt] + (z^3\varphi'')''.\cos(nt) + (z_3\chi'')''\sin(nt) = U.\cos nt + V.\sin nt.$$

Setzt man die Koeffizienten von cos nt und sin nt einzeln gleich Null, so folgt

$$3) \qquad \begin{aligned} (z^3\varphi'')'' - \lambda.z\varphi - U &= 0 \\ (z^3\chi'')'' - \lambda.z\chi - V &= 0. \end{aligned}$$

Von den unhomogenen Differentialgleichungen gelangt man zu den unhomogenen Integralgleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} \varphi(z) &= \lambda \int_0^1 \zeta\varphi(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta + g(z) \\ \chi(z) &= \lambda \int_0^1 \zeta\chi(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta + h(z), \end{aligned}$$

worin $$g(z) = -\int_0^1 V(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta$$

$$h(z) = -\int_0^1 U(\zeta)K(z,\zeta)d\zeta$$

quellenmässig dargestellte Funktionen sind. Die Schmidtsche Lösung von 4) ist

5)
$$\varphi(z) = g(z) + \lambda \sum \frac{c_\nu \Phi_\nu(z)}{\lambda_\nu - \lambda}$$
$$\chi(z) = h(z) + \lambda \sum \frac{d_\nu \Phi_\nu(z)}{\lambda_\nu - \lambda},$$
$$\lambda_\nu = \int_0^1 z\Phi_\nu(z)g(z)dz$$
$$d_\nu = \int_0^1 z\Phi_\nu(z)h(z)dz.$$

Damit die Lösung gültig ist, muss $\lambda \neq \lambda\nu$, mithin $n \neq n_\nu$ sein, d. h. die Periode der äussern Kraft darf mit keiner Eigenschwingung koinzidieren. Eine partikuläre Lösung der Gleichung 1) ist nunmehr die folgende:

6)
$$y = g(z)\cos nt + h(z)\sin nt + \lambda \sum_\nu \frac{c_\nu \Phi_\nu(z)}{\lambda_\nu - \lambda}\cos nt + \lambda \sum_\nu \frac{d_\nu \Phi_\nu(z)}{\lambda_\nu - \lambda}\sin nt.$$

Die allgemeine Lösung einer unhomogenen Differentialgleichung ist bekanntlich gleich einer partikulären, vermehrt um die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Um also die allgemeine Lösung von 1) zu erhalten, muss man zu obigem Ausdruck noch

$$\sum \Phi_\nu(z)\ (A_\nu \cos n_\nu t + B_\nu \sin n_\nu t)$$

hinzufügen. Entwickelt man die quellenmässig dargestellten Funktionen g(z) und h(z) in Reihen

$$g(z) = \sum c_\nu \Phi_\nu(z),$$
$$h(z) = \sum d_\nu \Phi_\nu(z),$$

so ist die allgemeine Lösung

$$8) \quad J = \sum \Phi_\nu(z) \left(A_\nu \cos n_\nu t + B_\nu \sin n_\nu t + \frac{\lambda_\nu c_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \cos nt + \frac{\lambda_\nu d_\nu}{\lambda_\nu - \lambda} \sin nt \right).$$

y kann mittels der willkürlichen Konstanten A_ν und B_ν einem gegebenen Anfangszustande angepasst werden. Es kann also

$$y \Big|^{t=0} = F_1(z),$$
$$\frac{\delta y}{\delta t} \Big|^{t=0} = F_2(z)$$

vorgeschrieben werden, wobei die willkürlichen Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ lediglich die Bedingungen der Entwickelbarkeit zu erfüllen brauchen.

§ 7. Der kegelförmige Stab.

Bildet der Stab einen sehr spitzen Kegel, so ist in der Differentialgleichung zu Beginn dieses Kapitels $m = 1$, $n = 1$ zu setzen. Die Gleichung lautet dann

$$1) \quad \frac{\delta^2}{\delta z^2} \left(z^4 \frac{\delta^2 y}{\delta z^2} \right) = - a z^2 \frac{\delta^2 y}{\delta t^2},$$

z geht von 0 bis l. Setzt man wieder

$$x = z\sqrt{a}, \qquad 0 \leqq x \leqq l\sqrt{a} = c,$$

so erhält man

$$2) \quad \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(x^4 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} \right) = - x^2 \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}.$$

Sei

$$3) \quad y = u(x) \begin{cases} \sin k t \\ \cos k t \end{cases}.$$

Zur Bestimmung von u(x) dient

$$4) \quad (x^4 u'')'' = k^2 \cdot x^2 \cdot u.$$

Die Randbedingungen sind

$$5) \quad \begin{aligned} x = 0: \quad & x^4 u'' = 0; \quad (x^4 u'')' = 0 \\ x = c: \quad & u = 0; \quad u' = 0. \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion $K(x,\xi)$ soll der Gleichung

6) $$(x^4K'')'' = 0,$$

den Randbedingungen und der Unstetigkeitsbedingung

$$K'''(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = \frac{1}{\xi^4}$$

Genüge leisten. Man erhält aus 4) die Gleichung

7) $$u(x) = -k^2 \int_0^c \xi^2 u(\xi) K(x,\xi)\, d\xi$$

und umgekehrt aus 7) die Gleichung 4).

Setzt man $x.u(x) = v(x)$; $x\xi K(x,\xi) = G(x,\xi)$, so folgt

$$v(x) = -k^2 \int_0^c v(\xi) G(x,\xi)\, d\xi \quad \text{oder für}$$

$$-k^2 = \lambda \quad .$$

8) $$v(x) = \lambda \int_0^c v(\xi) G(x,\xi)\, d\xi.$$

Es existieren also die $v_\nu(x)$ und die λ_ν, flgl. auch die $u_\nu(x)$.

Die Orthogonalität ist gegeben durch

$$\int_0^c v_\nu(\gamma) v_\mu(\gamma)\, d\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \int_0^c \gamma^2 u_\nu(\gamma) u_\mu(\gamma)\, d\gamma = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu.$$

Die normierten Eigenfunktionen sind

$$\varphi_\nu(x) = \frac{v_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^c v_\nu^2(\gamma)\, d\gamma}} \quad ; \quad \psi_\nu(x) = \frac{u_\nu(x)}{\sqrt{\int_0^c \gamma^2 u_\nu^2(\gamma)\, d\gamma}}.$$

Jetzt sei $F(x)$ eine den Randbedingungen genügende, mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stetige Funktion, für die der Ausdruck $\frac{L(F)}{x}$ auch an der Stelle $x = 0$ endlich bleibt. Zur Abkürzung ist $(x^4F'')'' \equiv L(F)$ gesetzt.

Dann kann man schreiben

9) $$L(F) = -xf(x) ,$$

wo f(x) im Grundgebiete stetig ist. Hieraus ergibt sich

10) $$F(x) = \int_0^c \xi f(\xi) K(x,\xi) d\xi$$

$$x.F(x) = \int_0^c f(\xi) G(x,\xi) d\xi .$$

Die Funktion x.F(x) ist also quellenmässig dargestellt und kann nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ entwickelt werden:

$$x.F(x) = \Sigma a_\nu \varphi_\nu(x) ; \quad \text{mithin}$$

11) $$F(x) = \Sigma a_\nu \psi_\nu(x) ,$$

$$a_\nu = \int_0^c \gamma^2 \psi_\nu(\gamma) F(\gamma) d\gamma .$$

Der Punkt x = 0 ist wieder singulär, x = c aber regulär. Für die Eigenfunktionen findet man

12) $$u_\nu(x) = \frac{d}{dc} J_0(2\sqrt{k_\nu c}) \frac{d^2}{dx^2} X_0(2\sqrt{k_\nu x}) + \frac{d}{dc} X_0(2\sqrt{k_\nu c}) \frac{d^2}{dx^2} J_0(2\sqrt{k_\nu x}) ,$$

hierbei hat k_ν der Gleichung

13) $$\frac{d}{dc}\left[\frac{d}{dc} J_0(2\sqrt{k_\nu c}) \cdot \frac{d}{dc} X_0(2\sqrt{k_\nu c})\right] = 0$$

zu genügen.

Der Kern hat die Form

14) $$K(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x.\xi}{3c^3} - \frac{x+\xi}{2c^2} + \frac{x}{6\xi^2} - \frac{1}{2\xi} + \frac{1}{c} & \text{für } x \leqq \xi \\ \frac{x\xi}{3c^3} - \frac{x+\xi}{2c^2} + \frac{\xi}{6x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{c} & \text{für } x \geqq \xi \end{cases} .$$

Da sich die Eigenfunktionen und Eigenwerte in ähnlicher Weise asymptotisch darstellen lassen wie bei dem „spitzen“ Stab, so gelten wiederum die Formeln A) bis K), wodurch die Möglichkeit der Entwickelung auch für solche Funktionen bewiesen ist, die nebst ihren ersten 4 Ableitungen eine endliche Anzahl endlicher Sprünge machen und den Randbedingungen nicht zu genügen brauchen.

---

2. Kapitel.

Die Schwingungen einer elastischen Kreisplatte.

§ 1. Differential- und Integralgleichung.

Die Differentialgleichung tür die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Platte lautet nach Kirchhoff „Gesammelte Abhandlungen“ S. 259ff.

$$1) \qquad \frac{\delta^2 w}{\delta t^2} + a^2 \left(\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} \right) = 0.$$

Hierin bedeutet w die Elongation eines Punktes der Platte, x und y Kartesische Koordinaten, t die Zeit und a eine vom Material abhängende Konstante. Die Begrenzung der Platte ist ein Kreis vom Radius l, dessen Mittelpunkt M mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt. Setzt man

$$w = u \begin{cases} \sin(4k^2 \cdot t) \\ \cos(4k^2 t), \end{cases}$$

wo u eine Funktion von x und y allein ist, so folgt für u

$$2) \qquad \Delta\Delta u \equiv \frac{\delta^4 u}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 u}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 u}{\delta y^4} = 16 k^4 . u .$$

Die Platte soll frei schwingen. Daraus ergeben sich die Randbedingungen:

I) im Punkte M ist u endlich.

II) Auf dem Grenzkreise gilt

$$\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \left\{ \left(\frac{\delta^3 u}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y^2} \right) \cos\varphi + \left(\frac{\delta^3 u}{\delta x^2 \delta y} + \frac{\delta^3 u}{\delta y^3} \right) \sin\varphi \right\} -$$

$$\frac{\delta}{\delta s} \left\{ \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right) \sin\varphi \cos\varphi \right\} = 0$$

und

$$\frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\right)+\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\cos^2\varphi+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\sin^2\varphi+2\,\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

Dabei ist Θ eine Konstante, φ der Winkel, den die nach innen gerichtete Normale des Grenzkreises mit der positiven Richtung der X = Achse bildet, $\frac{\delta}{\delta s}$ bezeichnet die Differentiation nach dem Bogen des Umfanges, wobei die Richtung entgegen dem Uhrzeigersinne als positiv gilt.

Führt man mittels der Gleichungen

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so geht 2) über

2*) $$\Lambda\Lambda u \equiv \frac{\delta^4 u}{\delta r^4}+\frac{2}{r}\frac{\delta^3 u}{\delta r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{2}{r^2}\frac{\delta^4 u}{\delta r^2\delta\varphi^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\delta^3 u}{\delta r\delta\varphi^2}+\frac{4}{r^4}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\delta^4 u}{\delta\varphi^4}=16k^4 u.$$

Die Grenzbedingungen nehmen die Form an

I) $r = 0$: u ist endlich

II) $r = 1$:

$$\gamma\frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left[\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right]=0$$

und $$(\gamma-1)\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}\right)+\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}=0.$$

Dabei ist $\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} = p$ gesetzt.

Die Lösung der Gleichung 2*) werde angenommen in der Form

$$u = U_n(r)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

n durchläuft die positiven ganzen Zahlen von 0 bis ∞, und Un(r) genügt der Gleichung

3) $$r^4 U_n^{IV}+2r^3 U_n'''-r^2(1+2n^2)U_n''+r(1+2n^2)U_n'+n^2(n^2-4)U_n+16k^4 r^4 U_n.$$

Diese kann in der für unsere Zwecke brauchbaren Form

$$3^*) \qquad L_n(U_n) \equiv (rU_n'')'' - (1+2n^2)\left(\frac{U_n'}{r}\right)' + \frac{n^2(n^2-4)U_n}{r^3} = 16k^4 . rU_n$$

geschrieben werden.

Die Randbedingungen sind

für $n = 1, 2 \ldots$

$$r = 0: \qquad Un = 0$$

$$r = 1 \begin{cases} \gamma r^3 U_n''' - rU_n'(n^2+\gamma n^2+2\gamma-1) + 3\gamma n^2 U_n = 0 \\ \gamma r^2 U_n'' + rU_n'(\gamma-1) + n^2 U_n(1-\gamma) = 0, \end{cases}$$

für $n = 0$ aber

$$r = 0: \qquad U_0 \text{ ist endlich; } U_0' = 0$$

$$r = 1 \begin{cases} \gamma r^3 U_0''' - rU_0'(2\gamma-1) = 0 \\ \gamma r^2 U_0'' + rU_0'(\gamma-1) = 0. \end{cases}$$

Wir führen jetzt einen Kern $K_n(r,r_1)$ ein, der durch folgende Forderungen bestimmt ist: Er genügt der Gleichung

$$4) \qquad L_n[K_n(r,r_1)] = 0,$$

erfüllt die Randbedingungen und ist nebst seinen beiden ersten Ableitungen nach r im Grundgebiete stetig, während die dritte Ableitung die Unstetigkeit

$$K_n'''(r,r_1)\Big|_{r=r_1+0}^{r=r_1-0} = \frac{1}{r_1}$$

aufweist.

Jedoch gilt die Gleichung 4) nur für $n \geqq 2$. Für $n = 0$ und $n = 1$ sei auf den folgenden § verwiesen.

Die partikulären Lösungen von 4) sind im Falle $n \geqq 2$:

$$r^{n+2},\ r^n,\ r^{2-n},\ r^{-n}.$$

Hieraus ist $K_n(r,r_1)$ leicht zu berechnen. Für $n = 1$ findet man r^3, r, $r\log(r)$, r^{-1} und für $n = 0$ endlich r^2, 1, $\log(r)$, $r^2\log(r)$.

Da die Lösungen r resp. 1 den betreffenden Randbedingungen von selbst genügen, so existieren in den beiden Fällen $n = 0$ und $n = 1$ keine gewöhnlichen, wohl aber

ausgeartete[1]) Greensche Funktionen. Die Greensche Formel lautet

$$\int_0^1 (vL_n(u) - uL_n(v))\, dr = P_n(u,v)\Big|_{r=0}^{r=1}$$
$$\equiv r(vu''' - v'u'' + v''u' - v'''u) + (vu'' - v''u) - \frac{(1+2n^2)}{r}(vu' - v'u)\Big|_0^1 .$$

Für zwei den Randbedingungen genügende, mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stetige Funktionen u(r) und v(r) verschwindet der Ausdruck $P_n(u,v)\Big|_0^1$, wie eine leichte Rechnung zeigt. Die Randbedingungen sind also Greensche. Mit Benutzung obiger Formel gelangt man von der Differentialgleichung zur Integralgleichung

$$5) \qquad U_n(r) = -16\, k_n^4 \int_0^1 r_1 U_n(r_1) K_n(r,r_1) dr_1 \qquad \underline{|n = 0,1,2..}$$

Für $\sqrt{r}\, U_n(r) = w_n(r)$, $\sqrt{r \cdot r_1} K_n(r,r_1) = G_n(r,r_1)$ und $-16\, k_n^4 = +\lambda_n$ ergibt sich aus 5) die Gleichung

$$6) \qquad w_n(r) = \lambda_n \int_0^1 w_n(r_1) G_n(r,r_1) dr_1 .$$

Hieraus erschliesst man wieder ebenso wie beim Problem des Stabes die Existenz der Eigenfunktionen $w_{n\mu}(r)$ und $U_{n\mu}(r)$ sowie der Eigenwerte $\lambda_{n\mu}$ und auch die Identität der Lösungen von 3) und 5).

Die Orthogonalität ist gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 w_{n\mu}(r) w_{n\nu}(r) dr &= 0 \\ \int_0^1 U_{n\mu}(r) U_{n\nu}(r) \cdot r dr &= 0 \end{aligned}\right\} \mu =|= \nu .$$

[1]) Kneser, Theorie der Int.-gl. §§ 14, 15.

Die normierten Eigenfunktionen sind:

$$\psi_{n\mu}(r) = \frac{w_{n\mu}(r)}{\sqrt{\int_0^l w_{n\mu}^2(\gamma)d\gamma}},$$

$$\varphi_{n\mu}(r) = \frac{U_{n\mu}(r)}{\sqrt{\int_0^l U_{n\mu}^2(\gamma).\gamma d\gamma}}.$$

Kirchhoff gibt auch eine konkrete Darstellung der Eigenfunktionen. In der von uns benutzten Bezeichnungsweise ist

$$U_{n\mu}(r) = X_n(2kr)[(n^2-4\gamma k^2l^2)J_n(2kl) - 2kl J_n'(2kl)] - J_n(2kr)[(n^2+4\gamma k^2l^2)X_n(2kl) - 2klX_n'(2kl)].$$

Die $k_{n\mu}$ sind Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$0 = 4\gamma n^2k^2l^2X_n(2kl)J_n(2kl) - 8\gamma n^2k^3l^3[X_n(2kl)J_n'(2kl) + J_n(2kl)X_n'(2kl)] - [n^2(n^2-1)kl + 16\gamma^2k^5l^5][X_n(2kl)J_n'(2kl) - J_n(2kl)X_n'(2kl)] + 16\gamma k^4l^4J_n'(2kl)X_n'(2kl).$$

§ 2. Berechnung der Kerne.

Man berechnet die Kerne leicht nach der von Westfall[1]) angegebenen Methode und findet für $n \geqq 2$

$$K_n(r,r_1) = \frac{1}{8}\left[\frac{r^{n+2}.r_1^{n+2}}{(n+1)(1-4\gamma)l^{2n+2}} - \frac{r^n.r_1^n(r^2+r_1^2)}{n(1-4\gamma)l^{2n}} + \frac{r^n.r_1^n[n^2+16\gamma^2-8\gamma]}{n^2(n-1)(1-4\gamma)l^{2n-2}} + \frac{r^{n+2}.r_1^{-n}}{n(n+1)} - \frac{r^nr_1^{2-n}}{n(n-1)}\right],$$

wenn $r \leqq r_1$; ist $r \geqq r_1$, so hat man in obiger Darstellung r und r_1 mit einander zu vertauschen. Ferner ergibt sich

$$K_1(r,r_1) = \frac{r.r_1(r^3+r_1^3)}{15l^3} + \frac{r^3r_1^3}{16l^4(1-4\gamma)} + \frac{r.r_1(r^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l^2(1-4\gamma)} - \frac{r.r_1(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}$$

---

[1]) Westfall, l. c.

$$- \frac{r.r_1 \log(l)}{4} + \frac{r^3}{16 r_1} + \frac{r.r_1 \log(r_1)}{4}$$

für $r \leqq r_1$ und endlich

$$K_0(r,r_1) = \frac{r^3 + {r_1}^3}{9l} + \frac{r^2 + {r_1}^2}{4} \log(l) + \frac{r^2.{r_1}^2}{8l^2(1-2\gamma)} - \frac{l^2(3-8\gamma)}{72(1-2\gamma)}$$
$$- \frac{(r^2 + {r_1}^2)\log(r_1)}{4} + \frac{r^2(12\gamma-7)}{24(1-2\gamma)} - \frac{{r_1}^2}{24(1-2\gamma)}$$

für $r \leqq r_1$.

Der Kern $K_n(r,r_1)$ genügt der Gleichung $L_n[K_n(r,r_1)] = 0$, wenn $n \geqq 2$. Dagegen ist $L_1[K_1(r,r_1)] = \frac{3r.r_1}{l^3}$ und

$$\int_0^l K_1(r,r_1).r_1 dr_1 = 0 \ ;$$

$$L_0[K_0(r,r_1)] = \frac{1}{l} \qquad \text{und} \qquad \int_0^l K_0(r,r_1) dr_1 = 0 \ .$$

Ebenso gelten für die Eigenfunktionen von K_1 und K_0 die Integralformeln

$$\int_0^l U_{1\mu}(r_1).r_1 dr_1 = 0 \quad , \qquad \int_0^l U_{0\mu}(r_1) dr_1 = 0 \ .$$

Die normierten Lösungen der Gleichung 2) des vorigen § sind

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n\mu}(r,\varphi) &= \frac{\varphi_{n\mu}(r)\cos n\varphi}{\sqrt{\pi}} \\ \overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi) &= \frac{\varphi_{n\mu}(r)\sin n\varphi}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right\} \text{ für } n \geqq 1$$

und

$$\varphi_{0\mu}(r,\varphi) = \frac{\varphi_{0\mu}(r)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\overline{\varphi_{0\mu}}(r,\varphi) = 0.$$

Für sie gelten, wenn $d\sigma$ das Flächenelement der Kreisplätte bezeichnet, die Beziehungen

$$\int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, \varphi_{n\mu}(r,\varphi)\varphi_{m\nu}(r,\varphi) = \int\int \varphi_{n\mu}(r,\varphi)\varphi_{m\nu}(r,\varphi)d\sigma = 0 \ ,$$

wenn entweder $n \neq m$ oder $\mu \neq \nu$ ist. Dagegen ist

$$\int\int \varphi_{n\mu}{}^2(r,\varphi)d\sigma = 1 \ .$$

Dieselben Gleichungen gelten für $\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$. Nun seien $0(r,\varphi)$ und $1(r_1,\varphi_1)$ zwei variable Punkte der Kreisplatte, von denen 1 nicht auf dem Rande liegen soll. Dann werde eine in r und r_1 sowie φ und φ_1 symmetrische Funktion K definiert durch die Gleichung

1) $$K(r,r_1\,;\,\varphi,\varphi_1) = K(0,1) =$$

$$\sum_n^{0,\infty}\sum_\mu \frac{\varphi_{n\mu}(0)\varphi_{n\mu}(1)}{\lambda_{n\mu}} + \sum_n^{0,\infty}\sum_\mu \frac{\overline{\varphi_{n\mu}}(0)\overline{\varphi_{n\mu}}(1)}{\lambda_{n\mu}} =$$

$$\sum_n^{1,\infty}\sum_\mu \frac{\varphi_{n\mu}(r)\varphi_{n\mu}(r_1)\cos n\varphi\cos n\varphi_1}{\pi\lambda_{n\mu}} + \sum_n^{1,\infty}\sum_\mu \frac{\varphi_{n\mu}(r)\varphi_{n\mu}(r_1)\sin n\varphi\sin n\varphi_1}{\pi\lambda_{n\mu}}$$

$$\sum_\mu \frac{\varphi_{0\mu}(r)\varphi_{0\mu}(r_1)}{2\pi\lambda_{0\mu}} \ .$$

$$\text{Mithin } \pi.K(0,1) = \sum_n^{1,\infty} \cos n(\varphi-\varphi_1) \sum_\mu \frac{\varphi_{n\mu}(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\mu \frac{\varphi_{0\mu}(r)\varphi_{0\mu}(r_1)}{\lambda_{0\mu}} \ .$$

Die Summation über μ wird mit Hilfe der eindimensionalen Kerne vollzogen. Es ist nämlich

2) $$K_n(r,r_1) = \sum_\mu \frac{\varphi_{n\mu}(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}} \ ,$$

da die Reihe rechts, wie gezeigt werden soll, im Grundgebiete $0\,..\,1$ der Variabeln r und r_1 gleichmässig konvergiert. Mit Rücksicht auf 2) ergibt sich aus 1) die Gleichung

3) $$\pi K(0,1) = \sum_n^{1,\infty} \cos n(\varphi-\varphi_1)K_n(r,r_1) + \frac{1}{2}\,K_0(r,r_1) \ .$$

Um nun die Summation über n ausführen zu können, muss man von folgenden Formeln Gebrauch machen

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n+1}\cos n\alpha}{n+1} = -\frac{\cos\alpha}{2}\left[\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1) + c^2\right] - c$$

$$- \sin\alpha \operatorname{arctg} \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - 1}$$

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n}\cos n\alpha}{n} = -\frac{1}{2}\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1) - c\cos\alpha$$

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n-1}\cos n\alpha}{n-1} = -\frac{\cos\alpha}{2}\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1) +$$

$$\sin\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - 1}$$

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n+1}\cos n\alpha}{n(n+1)} = -\frac{c^2\cos\alpha}{2} + \sin\alpha \operatorname{arctg} \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - 1}$$

$$+ c + \frac{\cos\alpha - c}{2}\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1)$$

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n}\cos n\alpha}{n(n-1)} = c\cos\alpha + c\sin\alpha \operatorname{arctg} \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - 1}$$

$$+ \frac{1 - \cos\alpha}{2}\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1)$$

$$\sum_{n}^{2,\infty} \frac{c^{n}\cos n\alpha}{n^2(n-1)} = 2c\cos\alpha + c\sin\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha - 1}$$

$$+ \frac{1 - \cos\alpha}{2}\log(c^2 - 2c\cos\alpha + 1) + \frac{1}{2}\int_0^c \frac{\log(z^2 - 2z\cos\alpha + 1)}{z}\, dz,$$

welche auf der Gleichung

$$\sum_{n}^{0,\infty} c^{n}\cos n\alpha = \frac{1 - c\cos\alpha}{c^2 - 2c\cos\alpha + 1}$$

beruhen.

Diese ist nur giltig für $0 \leqq c < 1$, jene aber auch für $c = 1$, wenn in diesem Falle $\alpha \lesseqgtr 0$ ist. Jetzt ergibt sich die konkrete Darstellung für K(0,1):

$$4)\quad \pi K(0,1) = \frac{\gamma(2\gamma-1)l^2}{2(1-4\gamma)} \int_0^{\frac{r-r_1}{l^2}} \frac{\log[z^2-2z\cos(\varphi-\varphi_1)+1]}{z}\,dz$$

$$+ \frac{\gamma(2\gamma-1)}{1-4\gamma}.\sin.(\varphi-\varphi_1)r.r_1 \operatorname{arctg} \frac{r.r_1\sin(\varphi-\varphi_1)}{r.r_1\cos-l^2} +$$

$$\frac{r^2+r_1^2}{16(1-4\gamma)} - \frac{8\gamma^2-4\gamma+1}{8(1-4\gamma)}.r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1) + \frac{\gamma(2\gamma-1)l^2}{2(1-4\gamma)}\log(r^2.r_1^2-2r.r_1l^2\cos+l^4)$$

$$- \frac{1}{16}[r^2+r_1^2-2r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1)]\log(r^2+r_1^2-2r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1))$$

$$+\frac{r.r_1(r^3+r_1^3)\cos(\varphi-\varphi_1)}{15l^3} + \frac{(15\gamma-2)rr_1(r^2+r_1^2)\cos(\varphi-\varphi_1)}{20l^2(1-4\gamma)} + \frac{r^3+r_1^3}{15l}$$

$$- \frac{r^2.r_1^2}{16l^2(1-2\gamma)(1-4\gamma)} + \frac{4\gamma-1+(45\gamma^2-12\gamma-6)\log(l)}{48(1-2\gamma)(1-4\gamma)}[r^2+r_1^2]$$

$$+ \frac{400\gamma^2-215\gamma+6+(400\gamma^2-12\gamma+25)\log(l)}{100(1-4\gamma)}.r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1)$$

$$- \frac{l^2(3-8\gamma)}{144(1-2\gamma)} - \frac{2\gamma(2\gamma-1)l^2\log(l)}{1-4\gamma}.$$

Es war

$$\varphi_{n\mu}(r) = \lambda_{n\mu}\int_0^l K_n(r,r_1)\varphi_{n\mu}(r_1).r_1dr_1,$$

figl.

$$\varphi_{n\mu}(r)\cos n\varphi = \lambda_{n\mu}\int_0^l K_n(r,r_1)\cos n\varphi\varphi_{n\mu}(r_1).r_1dr_1.$$

Aus Gleichung 3) ergibt sich aber

$$K_n(r,r_1)\cos n\varphi = \int_0^{2\pi} K(0,1)\cos n\varphi_1\,d\varphi_1.$$

Daher ist

$$\varphi_{n\mu}(0) = \lambda_{n\mu} \int\int K(0,1)\, \varphi_{n\mu}(1)\, d\sigma_1$$

5)

$$\overline{\varphi_{n\mu}}(0) = \lambda_{n\mu} \int\int K(0,1)\, \overline{\varphi_{n\mu}}(1)\, d\sigma_1.$$

Die Funktion K(0,1) erscheint also als Kern einer Integralgleichung. Sie bleibt mit ihren ersten partiellen Ableitungen im ganzen Grundgebiete endlich, wenn nur der Punkt 1 nicht auf den Rand fällt. Dagegen wird

$$\Delta K \equiv \frac{\delta^2 K}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta K}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 K}{\delta \varphi^2},$$

sobald die Punkte 0 und 1 zusammenfallen, unendlich wie $-\frac{1}{2\pi}\log(\rho_{01})$, wobei ρ_{01} den Abstand zwischen 0 und 1 bedeutet. Eine einfache Rechnung zeigt, dass K(0,1) denselben Randbedingungen genügt wie die Eigenfunktionen $\varphi_{n\mu}(0)$. Da die eindimensionalen Kerne $K_0(r,r_1)$ und $K_1(r,r_1)$ „ausgeartete" Greensche Funktionen sind, so gilt das auch von dem zweidimensionalen Kerne K(0, 1). Der Ausdruck $\Delta\Delta K$ verschwindet also nicht, vielmehr ist

$$\Delta\Delta K(0,1) = \frac{1}{\pi . r}\left\{\frac{1}{2l} + \frac{3r . r_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}{l^3}\right\}.$$

Ferner folgt aus 3) unter Benutzung der Integralformeln für $K_0(r,r_1)$ und $K_1(r,r_1)$:

$$\int\int K(0,1)\, dr\, d\varphi = 0$$

$$\int\int K(0,1)\cos\varphi . r\, dr\, d\varphi = 0$$

$$\int\int K(0,1)\sin\varphi . r\, dr\, d\varphi = 0.$$

§ 3. Entwickelung stetiger Funktionen.

Die Funktion $f_n(r)$ sei mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stetig und genüge denselben Randbedingungen wie die $\varphi_{n\mu}(r)$; ferner sei der Ausdruck $\frac{L_n[f_n(r)]}{\sqrt{r}}$ auch an der Stelle $r = 0$ endlich.

Dann kann man schreiben

$$L_n[f_n(r)] = -\sqrt{r}\,h_n(r),$$

wo h(r) im Grundgebiete stetig ist. Aus der Greenschen Formel folgt leicht

1) $$f_n(r) = \int_0^1 K_n(r, r_1)\sqrt{r_1}\,h_n(r_1)dr_1$$

$$f_n(r)\,.\,\sqrt{r} = \int_0^1 G_n(r,r_1)h_n(r_1)dr_1.$$

Damit die Greensche Formel auch in den Fällen $n = 0$ und $n = 1$ anwendbar sei, müssen noch die Gleichungen

$$\int_0^1 f_0(r)\,dr = 0 \text{ und } \int_0^1 f_1(r)\,.\,r\,dr = 0$$

gelten. Alsdann ergibt der Schmidtsche Entwickelungssatz

$$\sqrt{r}f_n(r) = \sum_\mu a_{n\mu}\,\psi_{n\mu}(r) \qquad \text{oder}$$

$$f_n(r) = \sum_\mu a_{n\mu}\varphi_{n\mu}(r),$$

wobei $$a_{n\mu} = \int_0^1 f_n(r)\varphi_{n\mu}(r)\,.\,r\,dr \qquad \text{ist.}$$

Jetzt werde über eine Funktion $F(r,\varphi)$ folgendes vorausgesetzt:

I) Sie ist mit ihren ersten 4 Ableitungen nach r und φ im Grundgebiete stetig.

II) Sie erfüllt die Randbedingungen

$$F\Big|^{\varphi=0} = F\Big|^{\varphi=2\pi};\quad \frac{\delta F}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=0} = \frac{\delta F}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=2\pi}$$

$$r = 0:\ F = \text{const.}$$

$$r = 1:\ \gamma\frac{\delta}{\delta r}\left[\frac{\delta^2 F}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta F}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left[\frac{\delta^2 F}{\delta r\,\delta\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\delta F}{\delta\varphi}\right] = 0$$

und $$(\gamma-1)\left(\frac{\delta^2 F}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta F}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 F}{\delta \varphi^2}\right)+\frac{\delta^2 F}{\delta r^2}=0.$$

III) Sie genügt den Gleichungen

$$\int\int F(r,\varphi)\,dr\,d\varphi = 0 \text{ und } \int\int F(r,\varphi)\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix} . r\,dr\,d\varphi = 0.$$

Zunächst ist $F(r,\varphi)$ in eine Fourierschke Reihe entwickelbar, wobei φ als Argument, r als Parameter angesehen wird:

3) $$F(r,\varphi) = A_0(r) + A_1(r)\cos\varphi + A_2(r)\cos\varphi . 2 + \ldots + B_1(r)\sin\varphi + \ldots$$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\cos n\varphi\, d\varphi;\quad B_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\sin n\varphi . d\varphi$$

für $n \geqq 1$ und

$$A_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\,d\varphi.$$

$$\frac{d}{dr}A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta r}\cos n\varphi\, d\varphi \text{ u. s. w.}$$

Die Funktion $A_n(r)$ ist also mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stetig. Sie erfüllt ferner dieselben Randbedingungen wie $f_n(r)$. Denn es ist

$$A_n(r)\Big|^{r=0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\varphi)\Big|^{r=0} . \cos n\varphi\, d\varphi = 0,$$

wenn $n \geqq 1$;

$$A_0(r)\Big|^{r=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\varphi)\Big|^{r=0} d\varphi = \text{const.}$$

$$\frac{dA_0(r)}{dr}\Big|^{r=0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\delta F}{\delta r}\Big|^{r=0} d\varphi = 0.$$

Auch die beiden Gleichungen an der Stelle $r = 1$ gelten für $A_n(r)$; denn hier hat man

$$(\gamma-1)\left[A''(r)+\frac{1}{r}A_n'(r)-\frac{n^2}{r^2}A_n(r)\right]+A_n''(r)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{(\gamma-1)\left(\frac{\delta^2F}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta F}{\delta r}-\frac{n^2F}{r^2}\right)+\frac{\delta^2F}{\delta r^2}\right\}\cos n\varphi d\varphi =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}-\frac{(\gamma-1)}{r^2}\left\{n^2F+\frac{\delta^2F}{\delta r^2}\right\}\cos n\varphi d\varphi.$$

Nun ist

$$F(r,\varphi)=\sum_n^{0,\infty}A_n(r)\cos n\varphi+\sum_n^{1,\infty}B_n(r)\sin n\varphi,$$

und eine solche Reihe darf, wie Westfall[1]) bewiesen hat, 2 mal gliedweise nach φ differentiiert werden. Daher folgt

$$\frac{\delta^2F}{\delta\varphi^2}=-1^2A_1(r)\cos\varphi-2^2A_2(r)\cos 2\varphi\ldots$$

$$n^2F+\frac{\delta^2F}{\delta\varphi^2}=n^2A_0(r)+(n^2-1^2)A_1(r)\cos\varphi+\ldots$$

Da schliesslich diese Reihe gliedweise integrierbar ist, ergibt sich

$$\int_0^{2\pi}\left(n^2F+\frac{\delta^2F}{\delta\varphi^2}\right)\cos n\varphi d\varphi=0.$$

$A_n(r)$ genügt also der einen Randbedingung und ebenso der zweiten.

Endlich ist noch wegen III)

$$\int_0^1 A_0(r)dr=0,$$

$$\int_0^1 A_1(r).rdr=\int_0^1 B_1(r).rdr=0.$$

Die Funktionen $A_n(r)$ nnd $B_n(r)$ lassen sich also nach den Eigenfunktionen entwickeln:

[1]) Westfall, l. c., § 12.

$$4)\qquad \begin{aligned} A_n(r) &= \sum_\mu c_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r) \\ B_n(r) &= \sum_\mu d_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r) \end{aligned} \qquad \underline{n = 0,1..}$$

Kombiniert man 4) mit 3), so erhält man die gesuchte Entwickelung

$$F(r,\varphi) = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)\,,$$

$$A_{n\mu} = \int\int F(r,\varphi)\varphi_{n\mu}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

$$B_{n\mu} = \int\int F(r,\varphi)\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Dieses Resultat wird im übernächsten § 5 auf einem viel einfachern Wege abgeleitet.

Genügt $F(r,\varphi)$ nur den Bedingungen I) und II), so wird eine Hilfsfunktion $G(r,\varphi)$ definiert durch die Gleichung

$$G(r,\varphi) \equiv F(r,\varphi) - a\,r\cos\varphi - b\,r\sin\varphi - c, \qquad \text{wobei}$$

$$a = \frac{3}{\pi l^3}\int\int F(r,\varphi)\cos\varphi\,r\,dr\,d\varphi,$$

$$b = \frac{3}{\pi l^3}\int\int F(r,\varphi)\sin\varphi\,.\,r\,dr\,d\varphi,$$

$$c = \frac{1}{2\pi l}\int\int F(r,\varphi)\,dr\,d\varphi \qquad \text{ist.}$$

Dann genügt $G(r,\varphi)$ der Bedingung III), aber auch den Forderungen I) und II). Flgl. ist

$$G(r,\varphi) = \sum\sum A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum\sum B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)\,.$$

Mithin

$$6)\qquad F(r,\varphi) = c + a\,.\,r\cos\varphi + b\,.\,r\sin\varphi + \sum\sum A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum\sum B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)\,.$$

§ 4. Entwickelung unstetiger Funktionen.

Wir wenden uns jetzt der Entwickelung unstetiger Funktionen zu. Sei $f_n(r)$ eine im Grundgebiete nebst ihren

ersten 4 Ableitungen stückweise stetige [1]) Funktion, welche den Randbedingungen nicht zu genügen braucht. Dann gilt

$$f_n(r) = \sum_{\mu} a_{n\mu}\, \varphi_{n\mu}(r)$$

an einer Stetigkeitsstelle und

$$\frac{f_n(r-0) + f_n(r+0)}{2} = \sum_{\mu} a_{n\mu}\, \varphi_{n\mu}(r)$$

an einer Unstetigkeitsstelle. Diese Entwickelungen beruhen auf den Formeln

A) $$K_n(r, r_1) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}} \quad \text{für } 0 \leqq \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \right\} \leqq 1$$

B) $$K_n'(r, r_1) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}'(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}} \quad \text{für } 0 \leqq \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \right\} \leqq 1$$

C) $$K_n''(r, r_1) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}''(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}} \quad \text{für } \varepsilon \leqq \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \right\} \leqq 1$$

D) $$K_n'''(r, r_1) = \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}'''(r)\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}} \quad \text{wenn } \varepsilon \leqq \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \right\} \leqq 1$$

und ausserdem $r \neq r_1$.

E) $$\frac{K_n'''(r-0, r) + K_n'''(r+0, r)}{2} = \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}'''(r)\,\varphi_{n\mu}(r)}{\lambda_{n\mu}}$$

für $\varepsilon \leqq r \leqq 1-\varepsilon$.

Dabei bedeutet ε stets eine beliebig kleine, aber feste positive Zahl.

Für die Einbeziehung des Endpunktes 1 ist die Formel

F) $$r\left[\sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}'''(r)\,\varphi_{n\eta}(r)}{\lambda_{n\mu}} - K_n'''(r-0, r)\right]\Bigg|^{r=1} = -1$$

massgebend. Im Randpunkte $r = 0$ ist eine Entwickelung der den Randbedingungen nicht unterworfenen $f_n(r)$ für $n \geqq 1$

[1]) Definition der stückweise stetigen Funktion s. Kneser, Integralgleichungen.

unmöglich, weil dort die $\varphi_{n\mu}(r)$ verschwinden. Wohl aber kann $f_0(r)$ nach den $\varphi_{o\mu}(r)$ entwickelt werden; denn es gilt

$$G) \quad r\left[\sum_{\mu}\frac{\varphi_{o\mu}'''(r)\,\varphi_{o\mu}(r)}{\lambda_{o\mu}} - K_0'''(r+0,r)\right]\Bigg|^{r=0} = +1.$$

Die Formeln A) bis G) werden in § 6 bewiesen.

A) Die Funktion $F(r,\varphi)$ werde definiert durch die Gleichung

$$F(r,\varphi) = \begin{cases} H(r,\varphi) & 0 \leqq r \leqq \rho \\ G(r,\varphi) & \rho \leqq r \leqq l \end{cases}.$$

H und G seien in den für sie bestimmten Gebieten mit ihren ersten beiden Ableitungen nach φ und ihren ersten 4 Ableitungen nach r stetig. Dann sind auf einem Kreise um M mit dem beliebigen Radius r $F(r,\varphi)$, $\frac{\delta F}{\delta\varphi}$, $\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi^2}$ stetige Funktionen von φ. Also gilt

$$F(r,\varphi) = \sum_{n}^{0,\infty} A_n(r)\cos n\varphi + \sum_{n}^{1,\infty} B_n(r)\sin n\varphi;$$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(r,\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq \rho$$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(r,\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi \quad \text{für} \quad \rho \leqq r \leqq l, \text{ wenn } n \geqq 1,$$

$$A_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(r,\varphi)d\varphi \qquad 0 \leqq r \leqq \rho$$

$$A_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(r,\varphi)d\varphi \qquad \rho \leqq r \leqq l$$

Die Funktionen $A_n(r)$, eventuell auch $\frac{dA_n(r)}{dr} \ldots \frac{d^4A_n(r)}{dr^4}$ werden also nur an der Stelle $r = \rho$ durch endlichen Sprung unstetig. Daraus ergibt sich

$$A_n(r) = \sum_\mu a_{n\mu}\varphi_{n\mu}(r) \qquad 0 < r \leqq l$$

$$\frac{A_n(\rho-0) + A_n(\rho+0)}{2} = \sum_\mu a_{n\mu}\varphi_{n\mu}(\rho)\,.$$

Im Punkte $r = 0$ ist die Entwickelung nur für $A_0(r)$ zulässig.

Analoge Formeln gelten für $B_n(r)$. Aus obigem folgt

$$F(r,\varphi) = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

auf der ganzen Platte mit Ausschluss des Unstetigkeitskreises ρ und auf diesem Kreise:

$$\sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi) =$$

$$\sum_n^{0,\infty}\cos n\varphi \sum_\mu a_{n\mu}\varphi_{n\mu}(\rho) + \sum_n^{1,\infty}\sin n\varphi \sum_\mu b_{n\mu}\varphi_{n\mu}(\rho)$$

$$=\sum_n^{0,\infty}\cos n\varphi\left\{\frac{A_n(\rho-0)+A_n(\rho+0)}{2}\right\}+\sum_n^{1,\infty}\sin n\varphi\left\{\frac{B_n(\rho-0)+B_n(\rho+0)}{2}\right\}$$

$$=\sum_n^{0,\infty}\frac{1}{2}\left\{A_n(\rho-0)\cos n\varphi + B_n(\rho-0)\sin n\varphi\right\}$$

$$+\sum_n^{0,\infty}\frac{1}{2}\left\{A_n(\rho+0)\cos n\varphi + B_n(\rho+0)\sin n\varphi\right\}$$

$$= \frac{F(\rho-0,\varphi) + F(\rho+0,\varphi)}{2} = \frac{H(\rho,\varphi) + G(\rho,\varphi)}{2}$$

Dass die Entwickelung von $F(r,\varphi)$ auch im Punkte M gültig bleibt, muss besonders bewiesen werden. Vorausgesetzt wird bloss, dass in diesem Punkte $F(0,\varphi)$ endlich und von φ unabhängig ist. Dann hat man

im Punkte M:

$$F(r,\varphi) = \sum_n^{0,\infty} A_n(r)\cos n\varphi + \sum_n^{1,\infty} B_n(r)\sin n\varphi = \text{const.},$$

flgl. mit Benutzung der oben angegebenen Formeln für die Koeffizienten

$$A_n(r) = B_n(r) = 0, \text{ wenn } n \geqq 1,$$

$$A_0(r) = F(r, \varphi) = \text{const} = \sum_{\mu} a_{0\mu}\varphi_{0\mu}(r)$$

$$= \sum_{\mu} A_{0\mu}\varphi_{0\mu}(r,\varphi).$$

Oder

$$F(r,\varphi) = \sum_{\mu} A_{0\mu}\,\varphi_{0\mu}(r,\varphi)$$

$$= \sum_{n}\sum_{\mu} A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_{n}\sum_{\mu} B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

Wird die Funktion $F(r,\varphi)$ auf einer endlichen Zahl von Kreisen um den Ursprung unstetig, so stellt die Reihe der Eigenfunktionen stets entweder die Funktion selbst oder auf einem Unstetigkeitskreise die halbe Summe der beiden Funktionswerte dar.

B) Die Funktion $F(r,\varphi)$ werde unstetig auf einer geschlossenen Kurve L, welche von den Linien $r = \text{const.}$ und $\varphi = \text{const.}$ nur in einer endlichen Zahl von Punkten geschnitten wird. Ist die Gleichung dieser Kurve in Polarkoordinaten

$$\varphi = f(r),$$

so wird vorausgesetzt, dass die Funktion $f(r)$ nebst ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete keine endlichen Sprünge macht. Jedoch darf $\frac{d\varphi}{dr} = f'(r)$ in den Punkten, in welchen L von einem Kreise um den Ursprung berührt wird, unendlich werden.

Sei

$$F(r,\varphi) = \begin{cases} H(r,\varphi) & \text{im Innern von L} \\ G(r,\varphi) & \text{ausserhalb L.} \end{cases}$$

Ueber H und G gelten dieselben Annahmen wie im Falle A). Der kleinste Radiusvektor, den man von M nach L ziehen kann, sei a, der grösste b. Dann ist auf einem Kreise um M mit dem Radius r, für den $0 \leqq r \leqq a$ gilt,

$$F(r,\varphi) = \sum_{n}^{0,\infty} A_n(r)\cos n\varphi + \sum_{n}^{1,\infty} B_n(r)\sin n\varphi = H(r,\varphi)$$

und für $b \leqq r \leqq l$

$$F(r,\varphi) = \sum_{n}^{0,\infty} A_n(r)\cos n\varphi + \sum_{n}^{1,\infty} B_n(r)\sin n\varphi = G(r,\varphi).$$

Liegt r zwischen a und b, so werde L durch den Kreis in m Punkten mit den Winkeln $\psi_1 \ldots \psi_m$ geschnitten. Dann ist

$$F(r,\varphi) = \begin{cases} H(r,\varphi) & 0 \leqq \varphi \leqq \psi_1 \\ G(r,\varphi) & \psi_1 \leqq \varphi \leqq \psi_2 \\ \ldots & \ldots \\ H(r,\varphi) & \psi_m \leqq \varphi \leqq 2\pi . \end{cases}$$

Die Funktionen F, $\frac{\delta F}{\delta \varphi}$, $\frac{\delta^2 F}{\delta \varphi^2}$ machen also nur eine endliche Zahl endlicher Sprünge. Daher gilt

$$F(r,\varphi) = \sum_{n} A_n(r)\cos n\varphi + \sum_{n} B_n(r)\sin n\varphi \qquad \text{und}$$

$$\frac{F(r,\psi_\nu - 0) + F(r,\psi_\nu + 0)}{2} = \frac{G(r,\psi_\nu) + H(r,\psi_\nu)}{2}$$

$$= \sum_{n} A_n(r)\cos\psi_\nu + \sum_{n} B_n(r)\sin\psi_\nu \quad \underline{\nu = 1,2 \ldots m}$$

Es ist also auf der ganzen Platte

$$F = \sum A_n(r)\cos n\varphi + \sum B_n(r)\sin n\varphi \quad \text{ausserhalb L.}$$

$$\frac{G + H}{2} = \sum A_n(r)\cos n\varphi + \sum B_n(r)\sin n\varphi \quad \text{auf L.}$$

Jedoch bilden die Punkte, in denen r ein Minimum oder Maximum ist, z. B. r = a oder r = b, eine Ausnahme. In ersteren wird, falls M innerhalb von L liegt, der innere Funktionswert H(r,φ), in letzteren der äussere G(r,φ) dargestellt. Liegt M ausserhalb L, so wird stets G(r,φ) dargestellt.

Man hat ferner

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi\,, \qquad 0 \leqq r \leqq a$$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi\,, \qquad b \leqq r \leqq l$$

und für $a \leqq r \leqq b$ ist

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\psi_1} H\cos n\varphi d\varphi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} G\cos n\varphi d\varphi + \ldots \int_{\psi_m}^{2\pi} H\cos n\varphi\, d\varphi\right\}.$$

$A_n(r)$, $A_n'(r)$, $A_n^{IV}(r)$ sind in den Intervallen 0..a und b..l unter den für H und G geltenden Voraussetzungen offenbar stetig. Im Intervalle a..b werde gemäss der Gleichung der Kurve

$$\psi_\nu = f_\nu(r) \qquad \nu = 1,2\ldots m$$

gesetzt. Dann folgt

$$\pi . A_n(r) = \int_0^{f_1(r)} H(r,\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{f_1(r)}^{f_2(r)} G(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi + \ldots$$

$A_n(r)$ ist also stetig, weil H, G, f_1, f_2 ... stetig sind. Ferner ergibt sich

$$\pi \frac{dA_n}{dr}(r) = \int_0^{f_1(r)} \frac{\delta H}{\delta r}\cos n\varphi d\varphi + \int_{f_1(r)}^{f_2(r)} \frac{\delta G}{\delta r}\cos n\varphi d\varphi + \ldots$$

$$+ H(r,f_1)\cos nf_1 \frac{df_1}{dr} - G(r,f_1)\cos nf_1 \frac{df_1}{dr}$$

$$+ G(r,f_2)\cos nf_2 \frac{df_2}{dr} - H(r,f_2)\cos nf_2 \frac{df_2}{dr} \ldots$$

Ist nun z. B. der Punkt P_1 mit dem Winkel ψ_1 ein Ausnahmepunkt, in welchem L von einem Kreise um M berührt wird, so müssen hier 2 Punkte P_1 und P_2 zusammenfallen. Dann wird zwar $f_1'(r)$ unendlich. Es ist aber

$f_1 \equiv f_2$, $f_1' \equiv f_2'$ u.s.w.; die kritischen Glieder heben sich also gegenseitig auf, und $A_n'(r)$ bleibt endlich. Dasselbe gilt für die höhern Ableitungen. Es ist also zunächst $\frac{dA_n(r)}{dr}$ stetig, weil $\frac{\delta H}{\delta r}$ und $\frac{\delta G}{\delta r}$ stetig sind und die $f_\nu'(r)$ keine endlichen Sprünge machen. Ferner sind aber auch die höhern Ableitungen bis zur vierten unter den geltenden Voraussetzungen stetig. Die $A_n(r)$ und ebenso die $B_n(r)$ sind also im Grundgebiete mit ihren ersten 4 Ableitungen stetig. Flgl. gilt

$$\left.\begin{aligned} A_n(r) &= \sum_\mu a_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r) \\ B_n(r) &= \sum_\mu b_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r) \end{aligned}\right\} \text{für } 0 < r \leqq 1 \ .$$

Hieraus folgt endgiltig

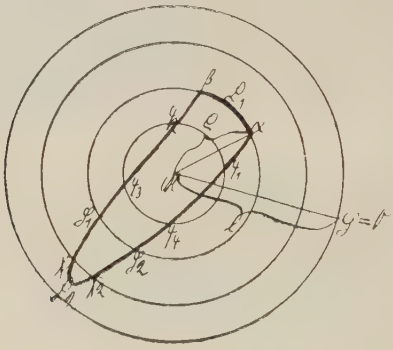
$$\sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi) = F(r,\varphi) \text{ ausserhalb L,}$$

$$\sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi) = \frac{H+G}{2}$$

auf L, jedoch mit Ausschluss der Ausnahmepunkte, in denen sich entweder H oder G ergibt.

Die Unstetigkeitslinie darf auch 2 Punkte des Randes mit einander verbinden, muss aber sonst denselben Bedingungen genügen wie obige Kurve L. Das Intervall 0..1 braucht dann nur in 2 Intervalle 0..a und a..1 zerlegt werden, wo a wieder den kleinsten Radiusvektor bedeutet. Die Kurve darf ferner aus einer endlichen Zahl von Stücken bestehen, deren jedes durch eine besondere Gleichung definiert ist, z. B. $\varphi = f(r)$ für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$, $\varphi = g(r)$ für $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \beta$ u.s.w., wenn für die einzelnen Kurvenstücke dieselben Voraussetzungen gelten wie für L, und wenn sie ausserdem so in einander übergehen, dass auch in den Grenzpunkten die Funktion φ mit ihren ersten 4 Ableitungen nach r stetig ist.

Γ) Die Unstetigkeitslinie L bestehe aus 2 Stücken L_1 und L_2. L_1 sei ein Teil eines Kreises um M mit dem Radius ρ, während L_2 den unter B) betrachteten Kurventypus darstellt.



Innerhalb L ist $F(r, \varphi) = H(r, \varphi)$,
ausserhalb $F(r, \varphi) = G(r, \varphi)$.

Der kleinste resp. grösste Radiusvektor von M nach L heisse a resp. b. Der Kreis mit ρ treffe L_2 in 4 Punkten mit den Winkeln α, β, φ_1, φ_2. Das Intervall a..b wird durch ρ noch in 2 Teilintervalle zerlegt. Ein Kreis mit einem Radius kleiner als ρ treffe L_2 in 4 Punkten mit den Winkeln $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Ein Kreis dessen Radius grösser als ρ ist, treffe L_2 in 2 Punkten mit den Winkeln χ_1 und χ_2. Dann ist

für $0 \leqq r \leqq a$

$$1) \qquad F = H = \sum_n A_n(r) \cos n\varphi + \sum_n B_n(r) \sin n\varphi,$$

für $b \leqq r \leqq l$

$$2) \qquad F = G = \sum_n A_n(r) \cos n\varphi + \sum_n B_n(r) \sin n\varphi,$$

für $a \leqq r < \rho$ und für $\rho < r \leqq b$

3) $$F = \sum_n A_n(r)\cos n\varphi + \sum_n B_n(r)\sin n\varphi,$$

jedoch mit Ausschluss von L_2,

4) $$\frac{H+G}{2} = \sum_n A_n(r)\cos n\varphi + \sum_n B_n(r)\sin n\varphi$$

auf L_2,

für $r = \rho$

endlich ist, wenn man von innen kommt,

$$F = F_I = \begin{cases} G & 0 \ldots \alpha \\ H & \alpha \ldots \beta \\ G & \beta \ldots \varphi_1 \\ H & \varphi_1 \ldots \varphi_2 \\ G & \varphi_2 \ldots 2\pi \end{cases}$$

5) $$F_I(\rho, \varphi) = \sum_n \mathfrak{A}_n(\rho)\cos n\varphi + \sum_n \mathfrak{B}_n(\rho)\sin n\varphi$$

mit Ausschluss der 4 Punkte α, β, φ_1, φ_2,

In diesem Punkte aber

6) $$\frac{H(\rho, \varphi) + G(\rho, \varphi)}{2} = \sum_n \mathfrak{A}_n(\rho)\cos n\varphi + \sum_n \mathfrak{B}_n(\rho)\sin n\varphi.$$

Kommt man von aussen, so ist

$$F = F_{II} = \begin{cases} G & 0 \ldots \varphi_1 \\ H & \varphi_1 \ldots \varphi_2 \\ G & \varphi_2 \ldots 2\pi \end{cases}$$

7) $$F_{II}(\rho, \varphi) = \sum_n \overline{\mathfrak{A}}_n(\rho)\cos n\varphi = \sum_n \overline{\mathfrak{B}}_n(\rho)\sin n\varphi$$

mit Ausschluss der beiden Punkte φ_1 und φ_2. In diesen aber

8) $$\frac{H(\rho, \varphi) + G(\rho, \varphi)}{2} = \sum_n \overline{\mathfrak{A}}_n(\rho)\cos n\varphi + \sum_n \overline{\mathfrak{B}}_n(\rho)\sin n\varphi$$

Die Koeffizienten $A_n(r)$ werden folgendermassen dargestellt. Es ist

für $0 \leqq r \leqq a$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H(r, \varphi)\cos n\varphi \, d\varphi,$$

für $b \leqq r \leqq l$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G(r,\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi,$$

für $a \leqq r \leqq \rho$,

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\psi_1} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\psi_1}^{\psi_2} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\psi_2}^{\psi_3} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\psi_3}^{\psi_4} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\psi_4}^{2\pi} G\cos n\varphi\, d\varphi\right\}.$$

Speziell

$$\mathfrak{A}_n(\rho) = \mathfrak{A}_n(\rho-0) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\alpha} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\alpha}^{\beta} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\beta}^{\varphi_1} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\varphi_2}^{2\pi} G\cos n\varphi\, d\varphi\right\},$$

für $\rho \leqq r \leqq b$

$$A_n(r) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\chi_1} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\chi_1}^{\chi_2} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\chi_2}^{2\pi} G\cos n\varphi\, d\varphi\right\}.$$

Speziell

$$\mathfrak{A}_n(\rho) = \mathfrak{A}_n(\rho+0) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\varphi_1} G\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} H\cos n\varphi\, d\varphi + \int_{\varphi_2}^{2\pi} G\cos n\varphi\, d\varphi\right\}.$$

Hieraus erkennt man, dass $A_n(r)$ in den Intervallen $0..a$, $b..l$, $a..\rho$, $\rho..b$ und auch in den Punkten a und b stetig ist. Nur für $r = \rho$ wird $A_n(r)$ unstetig durch endlichen Sprung. Flgl. gilt für

$$0 < r \leqq l$$

$$A_n(r) = \sum_{\mu} a_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r)$$

$$\frac{A_n(\rho-0)+A_n(\rho+0)}{2}=\frac{\mathfrak{A}_n(\rho)+\overline{\mathfrak{A}}_n(\rho)}{2}=\sum_{\mu} a_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(\rho)\,.$$

Die entsprechenden Formeln gelten auch für die $B_n(r)$. Daraus ergibt sich in Verbindung mit den Gleichungen 1) bis 8) für

$$0 \leqq r \leqq a$$

9) $$F = H = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

für

$$b \leqq r \leqq l$$

10) $$F = G = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

für

$$a \leqq r \leqq b,$$

wenn man zunächst von dem Kreise $r = \rho$ absieht,

11) $$F = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

mit Ausschluss von L_2,

12) $$\frac{H+G}{2} = \sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(r,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(r,\varphi)$$

auf L_2.

Für $r = \rho$ endlich ist

$$\sum_n\sum_\mu A_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(\rho,\varphi) + \sum_n\sum_\mu B_{n\mu}\,\overline{\varphi_{n\mu}}(\rho,\varphi) =$$

$$\sum_n^{0,\infty}\cos n\varphi\sum_\mu a_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(\rho) + \sum_n^{1,\infty}\sin n\varphi\sum_\mu b_{n\mu}\,\varphi_{n\mu}(\rho) =$$

$$\sum_n^{0,\infty}\frac{\mathfrak{A}_n(\rho)\cos n\varphi+\mathfrak{B}_n(\rho)\sin n\varphi}{2} + \sum_n^{0,\infty}\frac{\overline{\mathfrak{A}}_n(\rho)\cos n\varphi+\overline{\mathfrak{B}}_n(\rho)\sin n\varphi}{2}\,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf 5) bis 8):

Die Reihe der Eigenfunktionen stellt, abgesehen von den 4 Punkten α, β, φ_1, φ_2, den Wert $\frac{F_I + F_{II}}{2}$ dar, also auf L_1, wo $F_I = H$, $F_{II} = G$ ist, den Wert $\frac{H+G}{2}$, auf dem übrigen Teil des Kreises, wo $F_I = F_{II} = F$ ist, die Funktion F selbst.

In den Punkten φ_1 und φ_2 schliesslich wird $\frac{1}{2}\left\{\frac{H+G}{2}+\frac{H+G}{2}\right\}$ oder $\frac{H+G}{2}$ dargestellt, in den Punkten α und β jedoch $\frac{H+G}{4}+\frac{F_{II}}{2}$ oder, da hier $F_{II}=G$ ist, $\frac{H+3G}{4}$.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Reihe der Eigenfunktionen stellt im Falle Γ) auf der ganzen Platte dieselben Werte dar wie im Falle B), bloss in den Punkten α und β, wo die Kurvenstücke L_1 und L_2 in einander übergehen, wird $\frac{H+3G}{4}$ dargestellt.

Analoge Formeln gelten, wenn $F(r,\varphi)$ auf einer endlichen Anzahl einander nicht schneidender Kurven vom Charakter A), B) oder Γ) unstetig wird.

§ 5. Die zweidimensionale Greensche Formel.

Sei

$$\gamma\frac{\delta}{\delta r}(\Delta u)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right)\equiv A(u)$$

$$(\gamma-1)\Delta u+\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}\equiv B(u).$$

Bedeuten 0 und 1 zwei im Grundgebiete variable Punkte und n die nach innen gerichtete Normale, so ist die Greensche Formel für ein Kreisgebiet, wenn u und v mit ihren ersten 4 Ableitungen im Grundgebiete stetig sind,

$$1)\qquad \int\int\left\{u(0)\Delta\Delta v(0)-v(0)\Delta\Delta u(0)\right\}d\sigma_0=$$

$$\frac{1}{\gamma}\int\left\{-uA(v)+vA(u)-\frac{du}{dn}B(v)+\frac{dv}{dn}B(n)\right\}ds_0.$$

Dabei ist $d\sigma_0$ das Flächenelement des Gebietes, ds_0 das Element des Umfanges. Ist aber $v(0,1)$ eine Funktion beider Punkte 0 und 1, die irregulär wird wie $-\frac{\rho^2_{01}}{16\pi}\log[\rho^2_{01}]$, wobei ρ_{01} die Entfernung von 0 und 1 bezeichnet, so gilt

2) $$\int\int \left\{ u(0)\Delta\Delta v(0,1) - v(0,1)\Delta\Delta u(0) \right\} d\sigma_0 =$$

$$\frac{1}{\gamma}\int \left\{ -uA(v) + vA(u) - \frac{du}{dn} B(v) + \frac{dv}{dn} B(u) \right\} ds_0 + u(1).$$

Die Randbedingungen sind beim Problem der freien Platte

$$A(u) = 0,$$
$$B(u) = 0.$$

Setzt man in der Gleichung 1)

$$u = \varphi_{n\mu}(0), \quad v = \varphi_{m\nu}(0),$$

wo $\varphi_{n\mu}$ und $\varphi_{m\nu}$ Eigenfunktionen der freien Platte sind, so ist

$$\int\int \left\{ \varphi_{n\mu}\Delta\Delta\varphi_{m\nu} - \varphi_{m\nu}\Delta\Delta\varphi_{n\mu} \right\} d\sigma_0 =$$

$$(\lambda_{n\mu} - \lambda_{m\nu}) \int\int \varphi_{n\mu}\varphi_{m\nu}\, d\sigma_0 = 0$$

oder, wenn entweder $n \neq m$ oder $\mu \neq \nu$ ist,

$$\int\int \varphi_{n\mu}\varphi_{m\nu}\, d\sigma_0 = 0.$$

Nun werde in 2)

$$v(0,1) = K(0,1), \quad u(0) = F(0) \qquad \text{gesetzt.}$$

F ist eine willkürliche Funktion, die die Randbedingungen befriedigt, nach beiden Variabeln r und φ im Grundgebiete 4 mal stetig differentiierbar ist und ausserdem den Nebenbedingungen

$$(\alpha) \qquad \int\int F(0)\, dr d\varphi = 0,$$
$$\int\int F(0) \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} . r\, dr\, d\varphi = 0 \qquad \text{genügt.}$$

Sei $\Delta\Delta F(0) = -q(0)$, so folgt nach 2)

$$F(1) = \int\int (F\Delta\Delta K - K\Delta\Delta F)\, d\sigma_0 =$$

$$\int\int F . \frac{1}{\pi . r}\left(\frac{1}{2l} + \frac{3r . r_1 \cos\varphi\cos\varphi_1 + 3r . r_1 \sin\varphi\sin\varphi_1}{l^3}\right) . r dr d\varphi$$

$$+ \int\int K(0,1)q(0)d\sigma_0 .$$

Wegen (α) fällt das erste Glied der rechten Seite weg, und F ist quellenmässig dargestellt:

$$F(1) = \int\int K(0,1)q(0)d\sigma_0.$$

F darf also[1]) nach den Eigenfunktionen des Kernes K(0,1) entwickelt werden.

Für $v(0,1) = K(0,1)$, $u(0) = \varphi_{n\mu}(0)$ folgt, da auch die $\varphi_{n\mu}$ die Bedingung (α) erfüllen, die Integralgleichung

$$\varphi_{n\mu}(1) = \lambda_{n\mu}\int\int K(0,1)\,\varphi_{n\mu}(0)\,d\sigma_0\,.$$

Das Problem der elastischen Platte hat 4 Arten Greenscher Randbedingungen, die man unmittelbar aus der Greenschen Formel ablesen kann:

I) $A(u) = 0$, $B(u) = 0$, freie Platte
II) $u = 0$, $B(u) = 0$, unterstützte Platte
III) $u = 0$, $\frac{du}{dn} = 0$, eingespannte Platte
IV) $A(u) = 0$, $\frac{du}{dn} = 0$.

Der Fall II) führt zu den Randbedingungen

für $n \geqq 1$

$r = 0$: $U_n = 0$

$r = l$: $U_n = 0$ und $\gamma r^2 U_n'' + rU_n' = 0$,

für $n = 0$

$r = 0$: U_0 ist endlich, $U_0' = 0$

$r = l$: $U_0 = 0$, $\gamma r^2 U_0'' + rU_0' = 0$.

Man findet leicht

$$U_{n\mu}(r) = X_n(2k_{n\mu}l)J_n(2k_{n\mu}.r) - J_n(2k_{n\mu}l)X_n(2k_{n\mu}.r),$$

wobei J_n und X_n wieder die Besselschen Funktionen mit reellem resp. rein imaginären Argument sind. Die transzendente Gleichung für k ist

$$2\gamma kl\,[-J_n(2kl)X_n''(2kl) + X_n(2kl)J_n''(2kl)]$$
$$- J_n(2kl)X_n'(2kl) + X_n(2kl)J_n'(2kl) = 0.$$

Die Kerne $K_n(r,r_1)$ sind einfach zu berechnen. Es kommt keine ausgeartete Greensche Funktion vor. Infolge-

[1]) Schmidt, l. c., § 9; Kneser, l. c.

dessen ist auch der zweidimensionale Kern K(0,1) eine gewöhnliche Greensche Funktion. Er genügt also der Gleichung

$$\Delta\Delta\, K = 0$$

sowie den Randbedingungen und ist irregulär wie $-\frac{\rho^2_{01}}{16\pi}\log[\rho^2_{01}]$. Er kann durch doppelte Summation gefunden werden, wobei ähnliche Formeln anzuwenden sind wie in § 2. Hadamard [1]) hat ihn auf andere Weise berechnet.

$$-16\pi K(0,1) =$$

$$[r^2 + r_1^2 - 2r\,.\,r_1\cos(\varphi - \varphi_1)]\log(r^2 + r_1^2 - 2r\,.\,r_1\cos) -$$

$$\frac{r^2 r_1^2 + l^4 - 2r\,.\,r_1 l^2\cos}{l^2}\log\left(\frac{r^2 r_1^2 + l^4 - 2r\,.\,r_1 l^2\cos}{l^2}\right)$$

$$+\frac{(r^2 - l^2)(r_1^2 - l^2)}{l^2}\left(\frac{4\gamma - 1}{2\gamma - 1} + 2\log(l) + \right.$$

$$\left.\frac{2\gamma - 1}{2\gamma}\cdot\frac{l^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}}{(r\,.\,r_1)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}}}\cdot\int_0^{\frac{r\,.\,r_1}{l^2}}\frac{\log(z^2 + 1 - 2z\cos)}{z^{\frac{1}{2\gamma}}}\cdot dz\right).$$

Das Argument der trigonometrischen Funktionen ist stets $(\varphi - \varphi_1)$.

Der Fall III) ist von Lauricella [2]) in mehreren Abhandlungen behandelt, und auch der zweidimensionale Kern berechnet worden. Die Randbedingungen sind

für $n \geqq 1$

$r = 0$: $U_n = 0$

$r = l$: $U_n = 0$, $U_n' = 0$,

für $n = 0$

$r = 0$: U_0 ist endlich, $U_0' = 0$

$r = l$: $U_0 = 0$, $U_0' = 0$.

Es ergibt sich als Eigenfunktion

$$U_{n\mu}(r) = X_n(2k_{n\mu}l)\,J_n(2k_{n\mu}r) - J_n(2k_{n\mu}l)\,X_n(2k_{n\mu}r),$$

wobei die k der Gleichung

[1]) Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Bd. 30.

[2]) Acta Math., 1908.

$$J_n(2kl)\,X_n'(2kl) - X_n(2kl)\,J_n'(2kl) = 0$$

genügen müssen. Die Kerne $K_n(r, r_1)$ sind sämtlich gewöhnliche Greensche Funktionen, daher auch $K(0,1)$. Man findet nach bekannter Methode für $n \geqq 2$

$$K_n(r, r_1) = \frac{1}{8}\left\{\frac{(r.r_1)^{n+2}}{(n+1)l^{2(n+1)}} + \frac{(r.r_1)^n}{(n-1)\,l^{2(n-1)}} - \frac{(r.r_1)^n(r^2+r_1^2)}{nl^{2n}} + \frac{r^{n+2}.r_1^{-n}}{n(n+1)} - \frac{r^{+n}.r_1^{2-n}}{n(n-1)}\right\},$$

wenn $r \leqq r_1$, andernfalls hat man r und r_1 mit einander zu vertauschen.

$$K_1(r, r_1) = \frac{1}{8}\left\{\frac{(r.r_1)^3}{2l^4} - r.r_1\,[2\log(l) - 1] - \frac{(r.r_1)(r^2+r_1^2)}{l^2} + \frac{r^3.r_1^{-1}}{2} + 2r.r_1\log(r_1)\right\},$$

wenn $r \leqq r_1$, und endlich

$$K_0(r, r_1) = \frac{1}{8}\left(\frac{(r.r_1)^2}{l^2} + (r^2+r_1^2)\;2\log(l) - l^2 - r^2 + r_1^2 - 2(r^2+r_1^2)\log(r_1)\right)$$

für $r \leqq r_1$.

Daraus ergibt sich in derselben Weise wie bei der freien Platte

$$-16\pi\,K(0,1) =$$

$$[(r^2+r_1^2 - 2r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1)]\log[r^2+r_1^2-2r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1)]$$

$$-[(r^2+r_1^2-2r.r_1\cos(\varphi-\varphi_1)]\log\left[\frac{r^2.r_1^2+l^4-2r.r_1l^2\cos(\varphi-\varphi_1)}{l^2}\right]$$

$$+\frac{r^2.r_1^2+l^4-l^2(r^2+r_1^2)}{l^2}$$

$K(0,1)$ genügt der Gleichung

$$\Delta\Delta\,K = 0$$

sowie den Randbedingungen und ist offenbar irregulär wie $-\frac{\rho_{01}^2}{16\pi}\log[\rho_{01}^2]$.

Der Fall IV) ist, wie es scheint, in der Literatur noch nicht behandelt. Die Randbedingungen der $U_n(r)$ sind für

$$n \geqq 1$$
$$r = 0: \quad U_n = 0$$
$$r = l: \quad U_n' = 0, \; r^3 U_n''' + 3_n{}^2 U_n = 0,$$
$$\text{für } n = 0$$
$$r = 0: \quad U_0 \text{ ist endlich, } U_0' = 0$$
$$r = l: \quad U_0' = 0, \; U_0''' = 0.$$

Daraus sind die Eigenfunktionen zu berechnen.

$$U_{n\mu}(r) = X_n'(2k_{n\mu}l)\, J_n(2k_{n\mu}.r) - J_n'(2k_{n\mu}.l)\, X_n(2k_{n\mu}.r).$$

Die Gleichung für die Eigenwerte k lautet

$$3n^2 [J_n(2kl)\, X_n'(2kl) - X_n(2kl)\, J_n'(2kl)] +$$
$$8k^3 l^3 [X_n'(2kl) J_n'''(2kl) - J_n'(2kl(X_n'''(2kl)] = 0.$$

Von den Kernen ist $K_0(r,r_1)$ ausgeartet, mithin auch K(0,1).

K genügt der Gleichung

$$\Delta\Delta K = \frac{a}{r} \quad ,$$

wobei a eine Konstante, d. h. von r und φ unabhängig ist. Ferner gilt

$$\int\int K(0,1) dr\, d\varphi = 0.$$

K genügt den Randbedingungen und ist irregulär wie $-\frac{\rho^2_{01}}{16\pi} \log [\rho^2_{01}]$. Die Fälle II, III, IV können mit denselben Methoden behandelt werden wie der Fall I, welcher der komplizierteste ist. Insbesondere dürfen auch unstetige, den Randbedingungen nicht unterworfene Funktionen unter gewissen Voraussetzungen nach den Eigenfunktionen entwickelt werden.

§ 6. Die Konvergenzbeweise.

Wir beweisen jetzt die Giltigkeit der Formeln A) bis G) des § 4 und zwar für den Fall der befestigten oder eingespannten Platte. Die Art der Beweisführung wird erkennen lassen, dass die drei andern Fälle mit denselben Methoden behandelt werden können. Zur Abkürzung wird

$$2\mathbf{k}_{n\mu}.\mathbf{r} = x,\ 2\mathbf{k}_{n\mu}.\mathbf{r}_1 = \xi,\ 2\mathbf{k}_{n\mu}.\mathbf{l} = \alpha_{n\mu}$$

gesetzt. Dann ist

$$0 \leqq \left\{ \int_{\xi}^{x} \right\} \leqq \alpha .$$

Aus § 5 ergibt sich die Eigenfunktion

$$U_{r\mu}(r) = X_n(\alpha)\, J_r(x) - J_n(\alpha)\, X_n(x).$$

Ferner findet man leicht

$$U_{n\mu}'(r) = \frac{\alpha}{l}\,(X_n(\alpha)J_n'(x) - J_n(\alpha)X_n'(x))$$

$$U_{n\mu}''(r) = \frac{\alpha^2}{l^2}\left(X_n(\alpha)\,\frac{(n^2-x^2)J_n(x) - xJ_n'(x)}{x^2} - J_n(\alpha)\,\frac{(n^2+x^2)X_n(x) - xX_n'(x)}{x^2}\right)$$

$$U_{n\mu}'''(r) = \frac{\alpha^3}{l^3}\left(X_n(\alpha)\,\frac{(-3n^2+x^2)J_n + (n^2x+2x-x^3)J_n'}{x^3} - J_n(\alpha)\,\frac{(-3n^2-x^2)X_n + (n^2x+2x+x^3)X_n'}{x^3}\right).$$

Die normierte Eigenfunktion ist

$$\varphi_{n\mu}(r) = \frac{U_{n\mu}(r)}{\sqrt{\int_0^l U^2_{n\mu}(\gamma).\gamma\, d\gamma}},$$

$$\int_0^l U^2{}_{n\mu}(\gamma).\gamma d\gamma = l^2\left(J^2{}_n(\alpha)X^2{}_n(\alpha) + \frac{1}{2}\,(X^2{}_n(\alpha)J'^2{}_n(\alpha) - J^2{}_n(\alpha)X'^2{}_n(\alpha))\right).$$

Die Eigenwerte sind Wurzeln der Gleichung

$$J_n(\alpha)X_n'(\alpha) - X_n(\alpha)J_n'(\alpha) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}.\cos\left[\frac{2n+1}{4}.\pi - \alpha\right] + \underset{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\psi}\right).\frac{l^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left(1 + \frac{\psi}{\alpha}\right) -$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\sin\left[\frac{2n+1}{4}\pi - \alpha\right] + \underset{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\psi}\right)\frac{l^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}}\left(1 + \frac{\psi}{\alpha}\right) = 0,$$

$$\cos\left[\frac{2n+1}{4}\pi-\alpha\right]-\sin\left[\frac{2n+1}{4}\pi-\alpha\right]+\frac{\psi}{\alpha}=0,$$

$$\operatorname{tg}\left[\frac{2n+1}{4}\pi-\alpha\right]\infty 1.$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha_{n\mu}=\left(\frac{n}{2}+\mu+k\right)\pi+\varepsilon_{n\mu},$$

$$\lim_{\mu=\infty}\varepsilon_{n\mu}=0.$$

Dabei ist k eine ganze, von μ unabhängige Zahl. Der genauere Wert von $\varepsilon_{n\mu}$ ist

$$\varepsilon_{n\mu}=\frac{\psi}{\mu}.$$

Wir zeigen jetzt, dass die Reihe $\sum_{\mu}\frac{\varphi_{n\mu}(r)\,\varphi_{n\mu}(r_1)}{\lambda_{n\mu}}$ im Bereiche 0..l der Variabeln r und r_1 gleichmässig und absolut konvergiert, woraus die Richtigkeit der Formel A) folgt. Man kann der Reihe, abgesehen von konstanten Faktoren, die Form

$$\sum_{\mu}\frac{U_{n\mu}(r)U_{n\mu}(r_1)}{k_{n\mu}^4\int_0^l U_{n\mu}^2(\gamma)\cdot\gamma d\gamma}$$ oder

$$\sum_{\mu}\frac{[X_n(\alpha)J_n(x)-J_n(\alpha)X_n(x)][X_n(\alpha)J_n(\xi)-J_n(\alpha)X_n(\xi)]}{\alpha^4[2J_n^2(\alpha)X_n^2(\alpha)+X_n^2(\alpha)J_n'^2(\alpha)-J_n^2(\alpha)X_n'^2(\alpha)]}$$

geben. Hieraus sind 4 Reihen zu bilden

1) $$\sum_{\mu}\frac{J_n(x)\,J_n(\xi)}{\alpha^4\left(2J_n^2(\alpha)+J_n'^2(\alpha)-J_n^2(\alpha)\frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)}\right)}$$

2) $$\sum_{\mu}\frac{J_n(\alpha)J_n(\xi)\cdot\frac{X_n(x)}{X_n(\alpha)}}{\alpha^4\left[2J_n^2(\alpha)+J_n'^2(\alpha)-J_n^2(\alpha)\frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)}\right]}$$

3) $$\sum_{\mu} \frac{J_n(\alpha) J_n(x) \frac{X_n(\xi)}{X_n(\alpha)}}{\alpha^4 \left[2 J_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) \frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)} \right]}$$

4) $$\sum_{\mu} \frac{J_n^2(\alpha) \frac{X_n(x)}{X_n(\alpha)} \cdot \frac{X_n(\xi)}{X_n(\alpha)}}{\alpha^4 \left[2 J_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) \cdot \frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)} \right]}$$

Beachtet man die Gleichungen

$$\left[2 J_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) \frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)} \right] =$$

$$\frac{J_n^2(\alpha) \left(1 + \frac{\psi}{\alpha} \right) + J_n'^2(\alpha) \left(1 + \frac{\psi}{\alpha} \right)}{1 + \frac{\psi}{\alpha}},$$

$$\lim_{\mu=\infty} [..] = J_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) = \frac{2}{\pi . \alpha} \left(1 + \frac{\psi}{\alpha} \right),$$

$\lim_{\mu=\infty} \alpha [..] = \frac{2}{\pi}$, so erkennt man, dass die Reihe 1) konvergiert wie

$$\sum_{\mu} \frac{J_n(x) J_n(\xi)}{\alpha^3}$$ oder,

da $J_n(x)$ für alle reellen x zwischen endlichen von x unabhängigen Grenzen liegt, wie $\sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{n\mu}^3}$.

Die Reihen 2) und 3) konvergieren, da $J_n(\alpha)$ im Zähler asymptotisch dargestellt werden darf, wie $\sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{n\mu}^{3\frac{1}{2}}}$, die Reihe 4) wie $\sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{n\mu}^4}$.

Die Reihe B) ist im wesentlichen

$$\sum_{\mu} \frac{(X_n(\alpha) J_n'(x) - J_n(\alpha) X_n'(x)) (X_n(\alpha) J_n(\xi) - J_n(\alpha) X_n(\xi))}{\alpha^3 (2 J_n^2(\alpha) X_n^2(\alpha) + X_n^2(\alpha) J_n'^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) X_n'^2(\alpha))}$$

Sie konvergiert wie $\sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{n\mu}^2}$, da auch $J_n'(x)$ zwischen endlichen, von x unabhängigen Grenzen liegt.

Die Reihe C) wird für $x = \xi = 0$ divergent, was dem Unendlichwerden des Kernes in der zweiten Ableitung $\frac{d^2}{dr^2} K_n(r, r_1)$ für $r = r_1 = 0$ entspricht. Sie konvergiert aber gleichmässig im Intervalle $\varepsilon..1$ der Variabeln r und r_1. Man erhält, abgesehen von konstanten Faktoren,

$$\sum_{\mu} \left[X_n(\alpha) \frac{(n^2-x^2)J_n(x) - xJ_n'(x)}{x^2} - J_n(\alpha) \frac{(n^2+x^2)X_n(x) - xX_n'(x)}{x^2}\right] \times [X_n(\alpha) \cdot J_n(\xi) - J_n(\alpha) X_n(\xi)]$$
$$\alpha^2 [2J_n^2(\alpha) X_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) X_n^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) X_n'^2(\alpha)],$$

und diese Reihe konvergiert, da man auch $J_n(x)$, $J_n'(x)$ u.s.w. asymptotisch darstellen darf, wie $\sum_{\mu} \frac{1}{\alpha_{n\mu}^2}$.

Von allen Reihen, in die D) zerlegt werden kann, ist nur diejenige zweifelhaft, bei der x in der höchsten Potenz im Zähler vorkommt, das ist

$$\sum_{\mu} \frac{[X_n(\alpha) J_n'(x) + J_n(\alpha) X_n'(x)] [X_n(\alpha) J_n(\xi) - J_n(\alpha) X_n(\xi)]}{\alpha [2J_n^2(\alpha) X_n^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) X_n'^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) X_n^2(\alpha)]}.$$

Sie zerfällt in 4 Reihen

1) $$\sum_{\mu} \frac{J_n'(x) J_n(\xi)}{\alpha \left[2J_n^2(\alpha) + J_n'^2(\alpha) - J_n^2(\alpha) \frac{X_n'^2(\alpha)}{X_n^2(\alpha)}\right]}$$

2) $$\sum_{\mu} \frac{J_n(\alpha) J_n(\xi) \cdot \frac{X_n'(x)}{X_n(\alpha)}}{\alpha \left[\quad\right]}$$

3) $$\sum_{\mu} \frac{J_n(\alpha) J_n'(x) \frac{X_n(\xi)}{X_n(\alpha)}}{\alpha \left[\quad\right]}$$

4) $$\sum_{\mu}\frac{J_n^2(\alpha)\,\frac{X_n'(x)}{X_n(\alpha)}\cdot\frac{X_n(\xi)}{X_n(\alpha)}}{\alpha\left[\quad\right]}\,.$$

Die Reihe 1) führt auf $\sum_{\mu} J_n'(x)\,J_n(\xi)$ oder

$$\sum_{\mu}\frac{\left[\sin\left(\frac{2n+1}{4}\,\pi-x\right)+\frac{\psi}{x}\right]\left[\cos\left(\frac{2n+1}{4}\,\pi-\xi\right)+\frac{\psi}{\xi}\right]}{\alpha}\,.$$

In Betracht kommt nur

$$\sum_{\mu}\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{4}\,\pi-x\right)\cdot\cos\left(\frac{2n+1}{4}\,\pi-\xi\right)}{\alpha}\,.$$

Diese Reihe kann in 2 Teile zerlegt werden

I) $\sum_{\mu}\frac{\sin(x-\xi)}{\alpha}$, II) $\sum_{\mu}\frac{\sin\left(x+\xi-\frac{2n+1}{2}\cdot\pi\right)}{\alpha}$ oder

I) $\sum_{\mu}\frac{\sin 2k_{n\mu}(r-r_1)}{\alpha_{n\mu}}$, II) $\sum_{\mu}\frac{\cos 2k_{n\mu}(r+r_1)}{\alpha_{n\mu}}$.

Berücksichtigt man die Gleichungen

$$k_{n\mu}=\left(\frac{n}{2}+\mu+k\right)\cdot\frac{\pi}{2l}+\frac{\varepsilon_{n\mu}}{2l}$$

und $$\varepsilon_{n\mu}=\frac{\psi}{\mu}\,,$$

so erhält man ebenso wie beim elastischen Stabe[1])

I*) $\sum_{\mu}\frac{\sin\frac{\mu\pi}{l}(r-r_1)}{\mu}$, $\sum_{\mu}\frac{\cos\frac{\mu\pi}{l}(r-r_1)}{\mu}$

II*) $\sum_{\mu}\frac{\sin\frac{\mu\pi}{l}(r+r_1)}{\mu}$, $\sum_{\mu}\frac{\cos\frac{\mu\pi}{l}(r+r_1)}{\mu}$

[1]) Vgl. 1. Kap. § 5. Reihe D. 2).

Setzt man in II*) $(r+r_1)\frac{\pi}{l} = u$, so ist $0 < u < 2\pi$, da ja $0 < \left\{\begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix}\right\} \leqq l$ gilt und $r-r_1$ dem Betrage nach über einer festen positiven Grenze liegen muss. Daher konvergieren die beiden Reihen gleichmässig. In I*) werde $(r-r_1)\frac{\pi}{l} = s$ gesetzt. Dann ist für

$$r > r_1 \text{ resp. für } r < r_1$$
$$0 < s < \pi \text{ resp. } -\pi < s < 0.$$

In beiden Fällen konvergieren die Reihen I*) gleichmässig.

Die Reihe 2) führt auf

$$\sum_{\mu} J_n(\alpha)\, J_n(\xi)\, \frac{X_n'(x)}{X_n(\alpha)} \qquad \text{oder auf}$$

$$\sum_{\mu} \frac{\cos\left(\alpha - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \cos\left(\xi - \frac{2n+1}{4}\pi\right) l^{x-a}}{\alpha}.$$

Ist $x < \alpha$, so kann $x - \alpha = -\alpha.d$ gesetzt werden, wobei $d > 0$ sein muss. Dann konvergiert die Reihe wie $\sum_{\mu}\frac{1}{\alpha^r}$, wobei r eine beliebig grosse positive ganze Zahl ist. Ist aber $x = \alpha$, so kommt man zu

$$\sum_{\mu} \frac{\cos\left(\alpha - \frac{2n+1}{4}.\pi\right) \cos\left(\xi - \frac{2n+1}{4}.\pi\right)}{\alpha},$$

und hierin ist $\xi < \alpha$ oder $r_1 < l$. Aus dieser Reihe ergeben sich nun ebenso wie bei 1) vier Reihen

$$\sum_{\mu} \frac{\sin\frac{\mu\pi}{l}(l+r_1)}{\mu}, \qquad \sum \frac{\cos\frac{\mu\pi}{l}(l+r_1)}{\mu},$$

$$\sum_{\mu} \frac{\sin\frac{\mu\pi}{l}(l-r_1)}{\mu}, \qquad \sum_{\mu} \frac{\cos\frac{\mu\pi}{l}(l-r_1)}{\mu},$$

welche wegen $l < r_1$ gleichmässig konvergieren. Auch 3) und 4) sind gleichmässig konvergent.

Von den Reihen, in die E) zerfällt, sind nur die einer Untersuchung bedürftig, die den Reihen I) und II) von D) entsprechen und in denen jetzt $x = \xi$ zu setzen ist. Man erhält somit

$$\text{I)} \quad \lim_{x=\xi} \sum_{\mu} \frac{\sin(x-\xi)}{\alpha}, \qquad \text{II)} \quad \sum_{\mu} \frac{\cos 2x}{\alpha}.$$

Aus II) gehen die Reihen hervor:

$$\sum_{\mu} \frac{\sin 2r \cdot \frac{\mu\pi}{l}}{\mu} \qquad \text{und} \qquad \sum_{\mu} \frac{\cos 2r \cdot \frac{\mu\pi}{l}}{\mu}.$$

Macht man von der Voraussetzung Gebrauch, dass r auch nicht bis an den regulären Endpunkt l heranrücken darf, so folgt wie oben ihre gleichmässige Konvergenz. Setzt man in I) $(r-r_1)\frac{\pi}{l} = s$, so wird man in derselben Weise wie beim Problem des Stabes schliesslich zu dem Grenzwert der Reihe

$$\sum_{\mu} \frac{\sin \mu . s}{\mu} = f(s)$$

für $s = 0$ geführt. Da

$$f(0) = \frac{f(+0) + f(-0)}{2}$$

ist, so ergibt sich wieder die Formel E).

Die Formel F), die am Randpunkte l giltig ist, wird folgendermassen bewiesen: Es ist

$$r \cdot \sum_{\mu} \frac{\varphi_{n\mu}'''(r)\, \varphi_{n\mu}(r)}{\lambda_{n\mu}} \Bigg|^{r=l} = 0,$$

weil $\varphi_{n\mu}(r)\big|^{r=l} = 0$ ist, und die Gleichung

$$rK_n'''(r-0,r)\Big|^{r=l} = +1$$

ergibt sich aus der konkreten Darstellung der Kerne im § 2.

Die Formel G) endlich beruht auf den Gleichungen

$$r.\sum_{\mu}\frac{\varphi_{0\mu}'''(r)\varphi_{0\mu}(r)}{\lambda_{0\mu}}\Bigg|^{r=0} = 0$$

und

$$rK_0'''(r+0,r)\,\Big|^{r=0} = -1.$$

Kontrollrechnungen für Stab und Platte.

1. Kapitel.

Der elastische Stab.

Aus § 1. Die Greensche Formel.

$$\int_0^c [v(x^3u'')'' - u(x^3v'')'']dx = v(x^3u'')' - u(x^3v'')' \Big|_0^c$$

$$- \int_0^c [v'(x^3u'')' - u'(x^3v'')']dx =$$

$$v(x^3u'')' - u(x^3v'')' - v'x^3u'' + u'x^3v'' \Big|_0^c =$$

$$x^3(vu''' - v'u'' + v''u' - v'''u) + 3x^2(vu'' - v''u) \Big|_0^c,$$

w. z. b. w.

Ableitung der Differentialgleichung aus der Integralgleichung.

$$\text{Vor.} \quad u(x) = \lambda \int_0^c \xi u(\xi) K(x,\xi) d\xi.$$

$$\text{Beh.} \quad (x^3u'')'' = -\lambda \cdot x \cdot u.$$

$$\text{Bew.} \quad x^3u'' = \lambda \int_0^c x^3 . \xi u(\xi) K''(x,\xi) d\xi.$$

$$(x^3u'')' = \lambda\int_0^x \xi u(\xi)[x^3K'']'d\xi + \lambda\int_x^c \xi u(\xi)[x^3K'']'d\xi$$

$$(x^3u'')'' = \lambda\int_0^\xi \xi u(\xi)[x^3K'']''d\xi + \lambda\int_x^c \xi u(\xi)[x^3K'']''d\xi$$

$$+ \lambda\xi u(\xi)[x^3K'']'\Big|_{\xi=0}^{\xi=x-0} + \lambda\xi u(\xi)[x^3K'']'\Big|_{\xi=x+0}^{\xi=c}.$$

Da $[x^3K'']'' = 0$ ist, verschwinden die Integrale. Ferner ist für

$\xi = 0$: $[x^3K''] = 0$ und $\xi = 0$, für
$\xi = c$: $u(\xi) = 0$.

Daher folgt

$$[x^3u'']'' = \lambda\xi u(\xi)[x^3K'']'\Big|_{\xi=x+0}^{\xi=x-0} = \lambda.\xi u(\xi)x^3K'''\Big|_{\xi=x+0}^{\xi=x-0}.$$

Aus $K'''(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = \frac{1}{\xi^3}$ erhält man endlich

$$K'''(x,\xi)\Big|_{\xi=x+0}^{\xi=x-0} = -\frac{1}{x^3}.$$

Mithin $[x^3u'']'' = -\lambda.x.u$, w. z. b.

Aus § 3. Konkrete Darstellung der Eigenfunktion $u_\nu(x)$.

Beh.

$$u_\nu(x) = J_0\left(2\sqrt{k_\nu c}\right)\frac{d}{dx}X_0\left(2\sqrt{k_\nu x}\right) + X_0\left(2\sqrt{k_\nu c}\right)\frac{d}{dx}J_0\left(2\sqrt{k_\nu x}\right).$$

Bew. Nach Kirchhoff S. 344 ist in unsern Bezeichnungen

$$u_\nu(x) = A\frac{d}{dx}X_0\left(2\sqrt{k_\nu x}\right) + B\frac{d}{dx}J_0\left(2\sqrt{k_\nu x}\right),$$

wobei A und B Konstante sind. Obige Funktion $u_\nu(x)$ genügt den Randbedingungen an der Stelle $x = 0$, sie soll auch diejenigen befriedigen, welche fur $x = c$ gelten. Das führt zur Bestimmung von A und B und zur Aufstellung der Gleichung für die k_ν.

Es ist für $x = c$

$$u_\nu(x) = 0 \text{ und } u_\nu'(x) = 0.$$ Also

$$A \frac{d}{dx} X_0(2\sqrt{k_\nu x}) + B \frac{d}{dx} J_0(2\sqrt{k_\nu x}) \Big|^{x=c} = 0,$$

$$A \frac{d^2}{dx^2} X_0(2\sqrt{k_\nu x}) + B \frac{d^2}{dx^2} J_0(2\sqrt{k_\nu x}) \Big|^{x=c} = 0.$$

Nun ist aber

$$x \frac{d^2}{dx^2} J_0(2\sqrt{k_\nu x}) + \frac{d}{dx} J_0(..) = -\sqrt{k_\nu} J_0(..)$$

und

$$x \frac{d^2}{dx^2} X_0(2\sqrt{k_\nu x}) + \frac{d}{dx} X_0(..) = +\sqrt{k_\nu} X_0(..).$$

Daher

$$A X_0(2\sqrt{k_\nu x}) - B J_0(2\sqrt{k_\nu x}) \Big|^{x=c} = 0$$

$A = J_0(2\sqrt{k_\nu c})$, $B = X_0(2\sqrt{k_\nu c})$, w. z. b. w.

Die Gleichung der k_ν lautet

$$J_0(2\sqrt{k_\nu c}) \frac{d}{dc} X_0(2\sqrt{k_\nu c}) + X_0(2\sqrt{k_\nu c}) \frac{d}{dc} J_0(2\sqrt{k_\nu c}) = 0.$$

Aus § 4. Beweis der Formel

$$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma = -\frac{\alpha^2}{2} J(\alpha) J_2(\alpha) X^2(\alpha).$$

Im folgenden wird statt $X(\alpha)$ das Symbol $J(i\alpha)$ verwandt. Setzt man $2\sqrt{k_\nu c} = \alpha_\nu$, so ist

$$u_\nu(x) = J(\alpha) \frac{d}{dx} J(2i\sqrt{k_\nu x}) + J(i\alpha) \frac{d}{dx} J(2\sqrt{k_\nu x}).$$

Also

$$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma = J^2(\alpha) \int_0^c \gamma \left[\frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu \gamma}) \right]^2 d\gamma$$

$$+ J^2(i\alpha) \int_0^c \gamma \left[\frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu \gamma})\right]^2 d\gamma$$

$$+ 2J(\alpha)J(i\alpha) \int_0^c \gamma \frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu \gamma}) \frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu \gamma}) . d\gamma .$$

Zunächst ist

$$\int_0^c \gamma \left[\frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu \gamma})\right]^2 d\gamma = \qquad \boxed{2\sqrt{k_\nu \gamma} = s}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{k_\nu c}} \left[\frac{dJ(s)}{ds}\right]^2 . sds = \frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{k_\nu c}} [J_1(s)]^2 . sds$$

$$= 2k_\nu c \int_0^1 [J_1(2.t\sqrt{k_\nu c})]^2 . t . dt \qquad \boxed{2t\sqrt{k_\nu c} = s}$$

$$= \frac{\alpha_\nu^2}{2} \int_0^1 [J_1(\alpha_\nu t)]^2 . t . dt .$$

Nach Riemann-Weber, part. Diff.-gl., Bd. 2, Kap. über Bess. Funkt. ist aber

$$2\alpha \int_0^1 [J_1(\alpha . t)]^2 . tdt = J_1(\alpha)J_2(\alpha) + \alpha[J_1 . J_2' - J_1' J_2]$$

Flgl. $$\int_0^c \gamma \left(\frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu \gamma})\right)^2 d\gamma = \frac{\alpha}{4} J_1(\alpha)J_2(\alpha)$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4} [J_1 J_2' - J_1' J_2].$$

Ferner $$\int_0^c \gamma \left(\frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu \gamma})\right)^2 d\gamma = \frac{\alpha^2}{2} \int_0^1 [J_1(i\alpha t)]^2 . t . dt$$

$$\boxed{\gamma = c . t^2} .$$

Es ist aber

$$2i\alpha \int_0^1 [J_1(i\alpha t)]^2 . t . dt = J_1(i\alpha)J_2(i\alpha) + i\alpha\,[J_1J_2' - J_1'J_2]$$

Folglich

$$\int_0^c \gamma \left(\frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu\gamma})\right)^2 d\gamma = -\frac{i\alpha}{4} J_1(i\alpha)J_2(i\alpha) + \frac{\alpha^2}{4}[J_1J_2' - J_1'J_2].$$

Endlich $$\int_0^c \gamma \frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu\gamma}) \frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu\gamma}) d\gamma =$$

$$\frac{i\alpha^2}{2} \int_0^1 J_1(\alpha t)J_1(i\alpha t) . t . dt$$

Aber

$$-2\alpha^2 \int_0^1 tJ_1(\alpha . t)J_1(i\alpha t)dt = i\alpha J_1(\alpha)J_2(i\alpha) - \alpha J_1(i\alpha)J_2(\alpha).$$

Flgl. $$\int_0^c \gamma \frac{d}{d\gamma} J(2\sqrt{k_\nu\gamma}) \frac{d}{d\gamma} J(2i\sqrt{k_\nu\gamma}) . d\gamma =$$

$$\frac{\alpha}{4} J_1(\alpha)J_2(i\alpha) + \frac{i\alpha}{4} J_1(i\alpha)J_2(\alpha).$$

Jetzt ergibt sich

$$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma)d\gamma = J^2(\alpha) \left\{ -\frac{i\alpha}{4} J_1(i\alpha)J_2 + \frac{\alpha^2}{4} \left(J_1J_2' - J_1'J_2\right) \right\}$$

$$+ J^2(i\alpha) \left\{ \frac{\alpha}{4} J_1(\alpha) J_2 + \frac{\alpha^2}{4} \left(J_1J_2' - J_1'J_2\right) \right\}$$

$$+ J(\alpha) J(i\alpha) \left(\frac{\alpha}{2} J_1(\alpha) J_2(i\alpha) + \frac{i\alpha}{2} J_1(i\alpha) J_2(\alpha) \right).$$

Benutzt man aus Riemann-Weber die Formeln

$$J_1(\alpha) = -J'(\alpha); \quad J_1' = \frac{1}{\alpha} . J' + J$$

$$J_2 = -\frac{2}{\alpha} \cdot J' - J; \; J_2' = \left(\frac{4}{\alpha^2} - 1\right) J' + \frac{2}{\alpha} \cdot J,$$

die auch für komplexe α gelten, so folgt

$$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma = \frac{\alpha^2}{4} \left(2J^2(\alpha)J^2(i\alpha) + J^2(\alpha)J'^2(i\alpha) + J^2(i\alpha)J'^2(\alpha)\right)$$
$$+ \alpha J^2(i\alpha)J(\alpha)J'(\alpha).$$

Aus der transzendenten Gleichung der Eigenwerte $J'(\alpha)\,J(i\alpha) + iJ(\alpha)\,J'(i\alpha) = 0$ ergibt sich aber $J'^2(\alpha)\,J^2(i\alpha) + J^2(\alpha)\,J'^2(i\alpha) = 0$.

Mithin $$\int_0^c \gamma u_\nu^2(\gamma) d\gamma = \frac{\alpha^2}{2} J^2(\alpha)J^2(i\alpha) + \alpha J^2(i\alpha)J(\alpha)J'(\alpha)$$

$$= \frac{\alpha}{2} J(\alpha)J^2(i\alpha)\,[\alpha J(\alpha) + 2J'(\alpha)]$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} J(\alpha)J_2(\alpha)J^2(i\alpha).$$

Genauere Berechnung von ε_n.

Aus der Gleichung

$$\cos\alpha + \frac{\psi}{\alpha} = 0 \qquad \text{folgt}$$

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi + k\pi + \varepsilon_n,$$

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Um ε_n genauer zu bestimmen, wird der Wert von α_n in obiger Gleichung wieder eingesetzt. Das ergibt

$$\sin\varepsilon_n \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{2} + k\right)\cdot\pi = (+1)\sin\varepsilon_n = \frac{\psi}{2n + 1 + 2k + \frac{2}{\pi}\varepsilon_n}$$

$$\sin\varepsilon_n = \frac{\psi_1}{\alpha_n} = \frac{\psi_2}{n}.$$

$\sin\varepsilon_n$ wird aber klein wie ε_n. Daher auch $\varepsilon_n = \frac{\psi}{\alpha_n}$.

2. Kapitel.

Die elastische Platte.

Aus § 1. Darstellung von $\Delta\Delta u$ in Polarkoordinaten.

Es ist

$$\Delta(\Delta u) = \left(\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}\right)\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}\right)$$

$$\frac{\delta}{\delta r}(\Delta u) = \frac{\delta^3 u}{\delta r^3} + \frac{1}{r}\frac{\delta^2 u}{\delta r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\delta u}{\delta r} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^3 u}{\delta r \delta\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta r^2}(\Delta u) = \frac{\delta^4 u}{\delta r^4} + \frac{1}{r}\frac{\delta^3 u}{\delta r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\delta u}{\delta r}$$

$$- \frac{4}{r^3}\frac{\delta^3 u}{\delta r \delta\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^4 u}{\delta r^2 \delta\varphi^2} + \frac{6}{r^4}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}(\Delta u) = \frac{\delta^4 u}{\delta r^2 \delta\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta^3 u}{\delta r \delta\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^4 u}{\delta\varphi^4}.$$

Hieraus folgt

$$\Delta\Delta u = \frac{\delta^4 u}{\delta r^4} + \frac{2}{r}\frac{\delta^3 u}{\delta r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\delta u}{\delta r}$$

$$+ \frac{2}{r^2}\frac{\delta^4 u}{\delta r^2 \delta\varphi^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\delta^3 u}{\delta r \delta\varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\delta^4 u}{\delta\varphi^4} + \frac{4}{r^4}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ableitung der Differentialgleichung für $U_n(r)$.

Die Gleichung für u lautet $\Delta\Delta u = 16k^4.u$. Setzt man

$$u = U_n(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases},$$

so ist offenbar

$$\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2} = -n^2.u \qquad \text{und}$$

$$\frac{\delta^4 u}{\delta\varphi^4} = +n^4.u.$$

Aus der Gleichung für u ergibt sich dann

$$U^{IV}(r) + \frac{2}{r}U'''(r) - \frac{1}{r^2}U''(r) + \frac{1}{r^3}U'(r) - \frac{2n^2}{r^2}U''(r)$$

$$+ \frac{2n^2}{r^3}U'(r) + \frac{n^4}{r^4}U(r) - \frac{4n^2}{r^4}U(r) = 16k^4 U(r)$$

oder

$$r^4\,U^{IV} + 2r^3\,U''' - (1+2n^2)\,r^2\,U'' + (1+2n^2)\,r.U' + n^2(n^2-4)\,U = 16k^4.r^4.U, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Ableitung der Randbedingungen an der Stelle $r = l$.

Aus

$$(\gamma-1)\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}\right)+\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}=0 \qquad \text{folgt}$$

$$(\gamma-1)\left(U_n'' + \frac{1}{r}U_n' - \frac{n^2}{r^2}U_n\right) + U_n'' = 0$$

$$\gamma r^2 U_n'' + (\gamma-1) r U_n' + n^2(1-\gamma)U_n = 0.$$

Aus $\gamma\frac{\delta}{\delta r}(\Delta u) + \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\,\delta\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right) = 0$ folgt

$$\gamma\left(U_n''' + \frac{1}{r}U_n'' - \frac{1}{r^2}U_n' - \frac{n^2}{r^3}U_n' + \frac{2n^2}{r^3}U_n\right) - \frac{n^2}{r^2}U_n' + \frac{n^2}{r^3}U_n = 0$$

oder $\gamma r^3 U_n''' + \gamma r^2 U_n'' - (n^2\gamma+\gamma+n^2)U_n' + (2\gamma n^2 + n^2)U_n = 0.$

Da aber $\gamma r^2 U_n'' = (1-\gamma).rU_n' + n^2(\gamma-1)\,U_n$ ist, ergibt sich endgültig

$$\gamma r^3 U_n''' - (2\gamma-1+\gamma n^2+n^2)rU_n' + 3\gamma n^2 U_n = 0.$$

Ableitung der Greenschen Formel.

Setzt man

$$L_n(u) = (ru'')'' - (1+2n^2)\left(\frac{u'}{r}\right)' + \frac{n^2(n^2-4)}{r^3}\,.\,u,$$

so ist

$$\int_0^l [vL_n(u) - uL_n(v)]\,dr =$$

$$v(r\,u'')' - u(rv'')'\Big|_0^l - \int_0^l [v'(ru'')' - u'(rv'')']\,dr$$

$$-(1+2n^2)v\,.\,\frac{u'}{r}+(1+2n^2)u\,.\,\frac{v'}{r}=$$

$$v(ru'')'-u(rv'')'-v'ru''+u'rv''$$

$$-(1+2n^2)\left(\frac{vu'}{r}-\frac{uv'}{r}\right), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aus § 2. Verification der Formeln, welche für die Kerne $K_0(r,r_1)$ und $K_1(r,r_1)$ gelten.

Der Kern $K_0(r,r_1)$ genügt der Gleichung

$$L_0[K_0]\equiv[rK_0'']''-\left(\frac{K_0'}{r}\right)'=\frac{1}{l}$$

Beweis. Sei z. B. $r\geqq r_1$. Dann ist

$$K_0(r,r_1)=\frac{r^3+r_1^3}{9l}+\frac{r^2+r_1^2}{4}.\log(l)+\frac{r^2.r_1^2}{8l^2(1-2\gamma)}-\frac{l^2(3-8\gamma)}{72(1-2\gamma)}$$

$$-\frac{(r^2+r_1^2)}{4}\log(r)+\frac{r_1^2(12\gamma-7)}{24(1-2\gamma)}-\frac{r^2}{24(1-2\gamma)}$$

$$K_0'(r,r_1)=\frac{r^2}{3l}+\frac{r}{2}.\log(l)+\frac{r.r_1^2}{4l^2(1-2\gamma)}-\frac{r}{12(1-2\gamma)}-\frac{r}{4}$$

$$-\frac{r_1^2}{4r}-\frac{r\log(r)}{2}$$

$$\left(\frac{K_0'}{r}\right)'=\frac{1}{3l}+\frac{r_1^2}{2r^3}-\frac{1}{2r}$$

$$K_0''=\frac{2r}{3l}+\frac{\log(l)}{2}+\frac{r_1}{4l^2(1-2\gamma)}-\frac{1}{12(1-2\gamma)}-\frac{1}{4}+\frac{r_1^2}{4r^2}$$

$$-\frac{\log(r)}{2}-\frac{1}{2}$$

$$(rK_0'')''=\frac{4}{3l}+\frac{r_1^2}{2r^3}-\frac{1}{2r}.$$

Mithin $$L_0[K_0]=\frac{1}{l}.$$

Der Kern genügt an der Stelle $r=l$ den Randbedingungen

$$\gamma r^2K_0''+rK_0'(\gamma-1)=0,$$

$$\gamma r^3K_0'''-rK_0'(2\gamma-1)=0.$$

Beweis. Wir berechnen noch die dritte Ableitung

$$K_0''' = \frac{2}{3l} - \frac{r_1^2}{2r^3} - \frac{1}{2r} .$$

Dann folgt für $r = l$:

$$\gamma r^2 K_0'' + r K_0'(\gamma - 1) = \gamma \left[\frac{2l^3}{3l} + \frac{l^2 \log(l)}{2} + \frac{r_1^2}{4(1-2\gamma)} - \frac{l^2}{12(1-2\gamma)} \right.$$
$$\left. - \frac{l^2}{4} + \frac{r_1^2}{4} - \frac{l^2 \log(l)}{2} - \frac{l^2}{2} \right] + (\gamma - 1) \left[\frac{l^3}{3l} + \frac{l^2 \log(l)}{2} + \frac{r_1^2}{4(1-2\gamma)} \right.$$
$$\left. - \frac{l^2}{12(1-2\gamma)} - \frac{l^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} - \frac{l^2 \log(l)}{2} \right] = 0.$$

Und $\gamma r^3 K_0''' - r K_0'(2\gamma - 1) = \gamma \left[\frac{2l^3}{3l} - \frac{r_1^2}{2} - \frac{l^2}{2} \right] -$

$$(2\gamma - 1) \left[\frac{l^3}{3l} + \frac{l^2 \log(l)}{2} + \frac{r_1^2}{4(1-2\gamma)} - \frac{l^2}{12(1-2\gamma)} - \frac{l^2}{4} - \frac{r_1^2}{4} - \frac{l^2 \log(l)}{2} \right] = 0.$$

Für $r \leqq r_1$ hat man

$$K_0(r, r_1) = \frac{r^3 + r_1^3}{9l} + \frac{r^2 + r_1^2}{4} \log(l) + \frac{r^2 . r_1^2}{8l^2(1-2\gamma)} - \frac{l^2(3-8\gamma)}{72(1-2\gamma)}$$
$$- \frac{(r^2 + r_1^2)}{4} \log(r_1) + \frac{r^2(12\gamma - 7)}{24(1-2\gamma)} - \frac{r_1^2}{24(1-2\gamma)} .$$

Also ist offenbar

$$K_0 \Big|^{r=0} = \text{endlich}, \qquad K_0' \Big|^{r=0} = 0 .$$

Die Unstetigkeitsgleichung der dritten Ableitung ergibt sich folgendermassen:

$$K_0''' = \frac{2}{3l} \text{ für } r \leqq r_1$$

$$K_0''' = \frac{2}{3l} - \frac{(r^2 + r_1^2)}{2r^3} \text{ für } r \geqq r_1$$

flgl. $$K_0''' \Big|_{r=r_1+0}^{r=r_1-0} = \frac{1}{r_1} , \quad \text{w. z. b. w.}$$

Der Kern $K_1(r, r_1)$ genügt der Gleichung

$$L_1[K_1] = [r K_1'']'' - 3 \left[\frac{K_1'}{r} \right]' - \frac{3 K_1}{r^3} = \frac{3 . r . r_1}{l^5} .$$

Beweis. Für $r \geqq r_1$ ist

$$K_1(r,r_1) = \frac{r.r_1(r^3+r_1^3)}{15l^3} + \frac{r^3.r_1^3}{16l^4(1-4\gamma)} + \frac{r.r_1(r^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l^2(1-4\gamma)}$$

$$- \frac{r.r_1(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)} - \frac{r.r_1\log(l)}{4} + \frac{r_1^3}{16.r} + \frac{r.r_1\log(r)}{4}$$

$$K_1' = \frac{r_1(r^3+r_1^3)}{15l^3} + \frac{r_1.r^3}{5l^3} + \frac{3r^2.r_1^3}{16l^4(1-4\gamma)} + \frac{r_1(r^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l^2(1-4\gamma)}$$

$$+ \frac{r_1.r^2(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)} - \frac{r_1(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)} - \frac{r_1\log(l)}{4} - \frac{r_1^3}{16r^2} + \frac{r_1}{4} + \frac{r_1\log(r)}{4}$$

$$\left[\frac{K_1'}{r}\right]' = \frac{2r.r_1}{15l^3} - \frac{r_1^4}{15r^2l^3} + \frac{2r.r_1}{5l^3} + \frac{3r_1^3}{16l^4(1-4\gamma)}$$

$$+ \frac{r_1(30\gamma-9)}{40l^2(1-4\gamma)} - \frac{r_1^3(30\gamma-9)}{40r^2l^2(1-4\gamma)} + \frac{r_1(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)} + \frac{r_1(130\gamma-37)}{200r^2(1-4\gamma)}$$

$$+ \frac{r_1\log(l)}{4r^2} + \frac{3r_1^3}{16r^4} + \frac{r_1}{4r^2} - \frac{r_1\log(r)}{4r^2} - \frac{r_1}{4r^2}$$

$$K_1'' = \frac{4r_1.r^2}{5l^3} + \frac{3r_1.r^3}{8l^4(1-4\gamma)} + \frac{3r.r_1(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)} + \frac{r_1^3}{8r^3} + \frac{r_1}{4r}$$

$$[rK_1'']'' = \frac{24r.r_1}{5l^3} + \frac{3r_1^3}{4l^4(1-4\gamma)} + \frac{3r_1(30\gamma-9)}{10l^2(1-4\gamma)} + \frac{3.r_1^3}{4r^4}.$$

Flgl. $L_1[K_1] = \frac{3r.r_1}{l^3}$. Für $r \leqq r_1$ ist der Beweis analog.

An der Stelle $r = l$ genügt K_1 den Randbedingungen

$$\gamma r^2K_1'' + rK_1'(\gamma-1) + K_1(1-\gamma) = 0$$

$$\gamma r^3K_1''' - 3\gamma.rK_1' + 3\gamma K_1 = 0.$$

Zum Beweise brauchen wir noch die dritte Ableitung

$$K_1''' = \frac{8r.r_1}{5l^3} + \frac{3r_1^3}{8l^4(1-4\gamma)} + \frac{3r_1(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)} - \frac{3r_1^3}{8r^4} - \frac{r_1}{4r^2}$$

Alsdann ist

$$\gamma r^2K_1'' + rK_1'(\gamma-1) + K_1(1-\gamma) = \gamma\left(\frac{4r_1l^4}{5l^3} + \frac{3r_1^3l^3}{8l^4(1-4\gamma)}\right.$$

$$\left. + \frac{3r_1l^3(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)} + \frac{r_1^3.l^2}{8l^3} + \frac{r_1l^2}{4l}\right) + (\gamma-1)\left(\frac{r_1.l(r_1^3+l^3)}{15l^3}\right.$$

$$+\frac{r_1.l}{5}+\frac{3r_1^3}{16l(1-4\gamma)}+\frac{r_1(r_1^2+l^2)(30\gamma-9)}{40l(1-4\gamma)}+\frac{r_1.l(30\gamma-9)}{20(1-4\gamma)}$$

$$-\frac{r_1l(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}-\frac{r_1.l\log(l)}{4}-\frac{r_1^3}{16l}+\frac{r_1l\log(l)}{4}+\frac{r_1.l}{4}\Big)+$$

$$(1-\gamma)\left(\frac{r_1(r_1^3+l^3)}{15l^2}+\frac{r_1^2}{16l(1-4\gamma)}+\frac{r_1(r_1^2+l^2)(30\gamma-9)}{40l(1-4\gamma)}\right.$$

$$\left.-\frac{r_1l(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}-\frac{r_1l\log(l)}{4}+\frac{r_1^2}{16l}+\frac{r_1.l.\log(l)}{4}\right)=0.$$

Ferner

$$r^3K_1'''-3rK_1'+3K_1=\frac{8l.r_1}{5}+\frac{3r_1^3}{8l(1-4\gamma)}$$

$$+\frac{3lr_1(30\gamma-9)}{20(1-4\gamma)}-\frac{3r_1^3}{8l}-\frac{l.r_1}{4}-\frac{r_1(l^3+r_1^3)}{5l^2}-\frac{3r_1l}{5}$$

$$-\frac{9r_1^3}{16l(1-4\gamma)}-\frac{3r_1(l^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l(1-4\gamma)}-\frac{3r_1l(30\gamma-9)}{20(1-4\gamma)}+\frac{3r_1\log(l)}{4}$$

$$+\frac{3r_1l(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}+\frac{3r_1^3}{16l}-\frac{3r_1\log(l)}{4}-\frac{3r_1l}{4}+\frac{3r_1(l^3+r_1^3)}{15l^2}$$

$$+\frac{3r_1^3}{16l(1-4\gamma)}+\frac{3r_1(l^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l(1-4\gamma)}-\frac{3lr_1(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}$$

$$-\frac{3r_1l\log(l)}{4}+\frac{3r_1^3}{16l}+\frac{3l.r_1\log(l)}{4}=0.$$

Für $r\leqq r_1$ ist

$$K_1(r,r_1)=\frac{rr_1(r^3+r_1^3)}{15l^3}+\frac{r^3.r_1^3}{16l^4(1-4\gamma)}+\frac{r.r_1(r^2+r_1^2)(30\gamma-9)}{40l^2(1-4\gamma)}$$

$$-\frac{rr_1(130\gamma-37)}{200(1-4\gamma)}-\frac{r.r_1\log(l)}{4}+\frac{r^3}{16r_1}+\frac{r.r_1\log(r_1)}{4}$$

Mithin $K_1\big|^{r=0}=0$.

Die Unstetigkeit der dritten Ableitung kommt auf folgende Weise zustande: Es ist

$$K_1'''=\frac{8r.r_1}{5l^3}+\frac{3r_1^3}{8l^4(1-4\gamma)}+\frac{3r_1(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)}+\frac{3}{8r_1}\quad\text{für } r\leqq r_1$$

$$K_1'''=\frac{8r.r_1}{5l^3}+\frac{3r_1^3}{8l^4(1-4\gamma)}+\frac{3r_1(30\gamma-9)}{20l^2(1-4\gamma)}-\frac{3r_1}{8r^4}-\frac{r_1^3}{4r^2}\text{ für } r\geqq r_1.$$

Daraus folgt

$$K_1''' \Big|_{r=r_1+0}^{r=r_1-0} = \frac{3}{8r_1} + \frac{3}{8r_1} + \frac{1}{4r_1} = \frac{1}{r_1}.$$

Aus § 5. Ableitung der beiden zweidimensionalen Greenschen Formeln.

Vor. Die Funktionen u und v seien mit ihren ersten 3 Ableitungen nach r und φ auf der ganzen Kreisplatte stetig. Ferner gelte

$$v\Big|^{\varphi=0} = v\Big|^{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\delta u}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=0} = \frac{\delta u}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=2\pi}$$

$$v\Big|^{\varphi=0} = v\Big|^{\varphi=2\pi}, \quad \frac{\delta v}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=0} = \frac{\delta v}{\delta\varphi}\Big|^{\varphi=2\pi}.$$

Sei

$$\gamma\frac{\delta}{\delta r}(\Delta u) + \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right) \equiv A(u)$$

$$(\gamma-1)\Delta u + \frac{\delta^2 u}{\delta r^2} \equiv B(u).$$

Beh. $$\int\int [u(0)\Delta\Delta v(0) - v(0)\Delta\Delta u(0)]\,d\sigma_0 =$$

$$\frac{1}{\gamma}\int\left\{-uA(v) + vA(u) - \frac{du}{dn}B(v) + \frac{dv}{dn}B(u)\right\} ds_0.$$

Bew. Bekanntlich ist

$$\int\int (u\Delta v - v\Delta u)\,d\sigma_0 = \int\left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right) ds_0,$$

wenn u und v mit ihren ersten Ableitungen im Grundgebiete stetig sind. Mithin

$$\int\int [u\Delta(\Delta v) - (\Delta v)\Delta u]\,d\sigma = \int\left\{u\frac{d}{dn}(\Delta v) - (\Delta v)\frac{du}{dn}\right\} ds$$

und

$$\int\int [(\Delta u)\Delta v - v\Delta(\Delta u)]\,d\sigma = \int\left\{(\Delta u)\frac{dv}{dn} - v\frac{d}{dn}(\Delta u)\right\} ds,$$

wenn u und v mit ihren ersten 3 Ableitungen stetig sind.

Flgl.

$$\int\int [u\Delta\Delta v - v\Delta\Delta u]d\sigma =$$

$$\int\left(u\frac{d}{dn}(\Delta v)-v\frac{d}{dn}(\Delta u)-\Delta v\frac{du}{dn}+\Delta u\frac{dv}{dn}\right)ds\,.$$

Benutzt man die Bezeichnungen A(u) und B(u), so ergibt sich

$$\gamma\cdot\int\int[u\Delta\Delta v-v\Delta\Delta u]d\sigma =$$

$$\int\Big\{-uA(v)+\frac{u}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 v}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta\varphi}\right)+vA(u)-\frac{v}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right)$$

$$-\frac{du}{dn}B(v)-\frac{du}{dn}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 v}{\delta\varphi^2}\right)+\frac{dv}{dn}B(u)+\frac{dv}{dn}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta r^2}\right)\Big\}ds\,.$$

Auf dem Rande ist aber

$$ds=l.d\varphi\,,\quad \frac{\delta}{\delta r}=-\frac{d}{dn}\,.$$

Ferner ergibt die partielle Integration

$$\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{u}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 v}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta\varphi}\right)+\frac{\delta u}{\delta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta v}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 v}{\delta\varphi^2}\right)-\frac{v}{r^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right)$$

$$-\frac{\delta v}{\delta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta r}+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 u}{\delta\varphi^2}\right)\Big\}d\varphi=\frac{u}{l^2}\left(\frac{\delta^2 v}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{l}\frac{\delta v}{\delta\varphi}\right)-\frac{v}{l^2}\left(\frac{\delta^2 u}{\delta r\delta\varphi}-\frac{1}{l}\frac{\delta u}{\delta\varphi}\right)$$

$$+\frac{1}{l^2}\left(-\frac{\delta u}{\delta\varphi}\frac{\delta v}{\delta r}+\frac{\delta v}{\delta\varphi}\frac{\delta u}{\delta r}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=0\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Vor. Sei v(0,1) eine Funktion der beiden Punkte 0 und 1, die irregulär ist wie $-\frac{\rho^2_{01}}{16\pi}\log[\rho^2_{01}]$. Im übrigen erfüllen u und v dieselben Bedingungen wie oben. Der Punkt 1 soll nicht auf dem Rande liegen.

Beh. $\gamma\int\int\Big\{u(0)\,\Delta\Delta v(0,1)-v(0,1)\Delta\Delta u(0)\Big\}\,d\sigma_0 =$

$$\int\Big\{-uA(v)+vA(u)-\frac{du}{dn}B(v)+\frac{dv}{dn}B(u)\Big\}ds_0+\gamma u(1).$$

Bew. Ist w(0,1) irregulär wie $-\frac{\log\rho_{01}}{2\pi}$, so gilt bekanntlich

$$\int\int\left\{u\Delta w - w\Delta u\right\} d\sigma = \int\left\{u\frac{dw}{dn} - w\frac{du}{dn}\right\} ds + u(1).$$

Da $\Delta v(0,1)$ irregulär wird wie $-\frac{\log\rho_{01}}{2\pi}$, worauf schon früher hingewiesen ist, so folgt

$$\int\int\left\{u\Delta(\Delta v) - (\Delta v)\Delta u\right\} d\sigma = \int\left\{u\frac{d}{dn}(\Delta v) - \Delta v\frac{du}{dn}\right\} ds + u(1).$$

Ferner

$$\int\int\left\{(\Delta u)\Delta v - v\Delta(\Delta u)\right\} d\sigma = \int\left\{(\Delta u)\frac{dv}{dn} - v\frac{d}{dn}(\Delta u)\right\} ds,$$

da die Funktionen Δu und v mit ihren ersten Ableitungen stetig sind.

Mithin $\int\int u\Delta\Delta v - v\Delta\Delta u \; d\sigma =$

$$\int\left\{u\frac{d}{dn}\Delta(v) - v\frac{d}{dn}(\Delta u) - \frac{du}{dn}\Delta v + \frac{dv}{dn}\Delta u\right\} ds + u(1).$$

Das Randintegral kann durch partielle Integration ebenso umgeformt werden wie bei der vorigen Formel, woraus sich die Behauptung ergibt.

Lebenslauf.

Ich, Wolfgang Sternberg, mosaischer Konfession, bin geboren am 20. 12. 1887 in Breslau als Sohn des Justizrats Dr. jur. C. Sternberg und seiner Frau Jenny, geb. Zendig. Von Ostern 1897 an besuchte ich das König-Wilhelms-Gymnasium zu Breslau und verliess es Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Reife. Seitdem widme ich mich dem Studium der Mathematik, Naturwissenschaften und Philosophie an der Breslauer Universität; während des Sommersemesters 1906 studierte ich in Freiburg i. Br. Ich besuchte die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren und Dozenten:

Biltz, Freudenthal (†), Hintze, Hönigswald, Klaatsch, Kneser, Kühnemann, Kükenthal, Lummer, Pringsheim, Rosanes, Schäfer, Strecker, Sturm, Waetzmann, in Breslau.

Lüroth und Lövy in Freiburg i. Br.

Allen diesen meinen verehrten Lehrern sage ich Dank für die Anleitung, die sie meinen Studien zuteil werden liessen; besonders aber danke ich Herrn Geheimrat Kneser für die reiche Förderung, die ich in seinen Vorlesungen und Seminaren genosssen habe, sowie für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und das freundliche Interesse, das er derselben entgegenbrachte.